

CHAPITRE 1 - CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ



Au 16^{ème} siècle, le principe de continuité (« si a et b sont tels que $p(a)p(b) < 0$, alors le polynôme p admet un zéro entre a et b ») est considéré comme géométriquement évident. Un exemple simple concerne les courbes que l'on trace *sans lever le crayon*. Cette première approche ne suffit pas pour définir la continuité.

En 1769, Joseph-Louis LAGRANGE propose deux démonstrations du principe de continuité, mais ces preuves ne sont pas convaincantes. C'est près de 50 ans plus tard, en 1817, que Bernard BOLZANO donne la première définition moderne d'une fonction continue.

En 1821, Augustin CAUCHY énonce à son tour le principe connu de nos jours sous le nom de théorème des valeurs intermédiaires. Mais il invoque comme preuve l'évidence géométrique (ce qui déplaît à Bolzano) et repousse en fin d'ouvrage une démonstration analytique.

Isaac NEWTON (1642-1727) est un philosophe, mathématicien, physicien, alchimiste, astronome et théologien anglais.

Surtout connu pour sa théorie de la gravitation universelle et la création du calcul différentiel, il a également développé, en optique, une théorie de la couleur basée sur l'observation selon laquelle un prisme décompose la lumière blanche en un spectre visible. Il est aussi connu pour la généralisation du théorème du binôme et l'invention dite de la méthode de Newton permettant de trouver des approximations d'une racine d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles.

Son ouvrage *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, publié en 1687, est considéré comme une œuvre majeure dans l'histoire des sciences.

I. Dérivabilité sur un intervalle

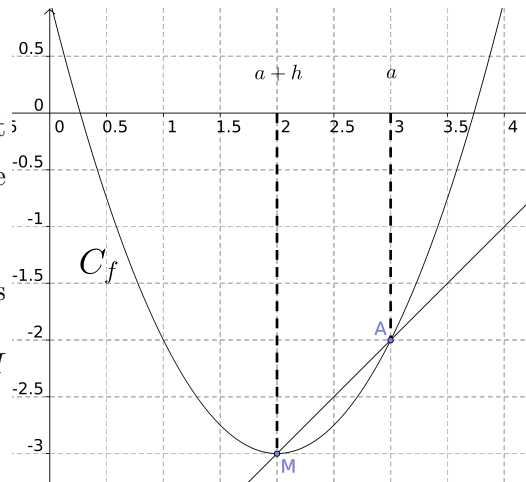
A. Rappels

A..1 Dérivabilité

Définition 1 (Rappels).

Soit f une fonction définie sur un intervalle I

- Soit $a \in I$ un réel, et h un réel non nul tel que $a + h \in I$.
On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ se rapproche d'un nombre réel l lorsque h se rapproche de 0.
Le réel l est alors appelé nombre dérivé de f en a , noté $f'(a)$.
- On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable pour tous les réels de I .
La fonction dérivée de f est la fonction qui à tout réel x de I associe le réel $f'(x)$.
On la note f' .



Remarque 1.

- Le nombre dérivé $f'(a)$, lorsqu'il existe, s'interprète graphiquement comme le coefficient directeur de la tangente à C_f en son point d'abscisse a .
- Attention, toutes les fonctions ne sont pas dérivables sur l'intégralité de leur ensemble de définition.
Penser par exemple à la fonction racine carrée qui est définie sur $[0; +\infty[$ mais dérivable sur $]0; +\infty[$.

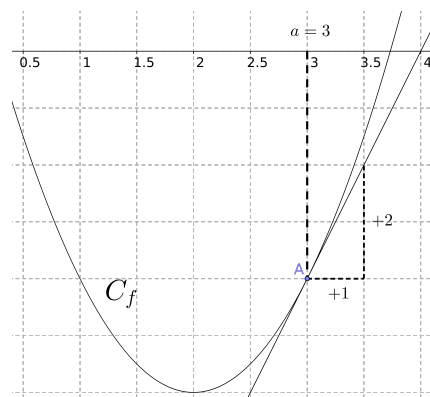
Proposition 1 (Rappels).

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ,
et dérivable en $a \in I$.

La droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$
est la *tangente* à C_f en A .

Cette droite a pour équation réduite

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$



A..2 Calculs de dérivées

$f(x)$	$f'(x)$	x appartient à
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x^n (n entier)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ et $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\exp(x) = e^x$	$\exp(x)$	$\mathbb{R}$

f	$f'(x)$	f est dérivable
$u + v$	$u' + v'$	sur I
uv	$u'v + uv'$	sur I
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	en tout x de I tel que $v(x) \neq 0$

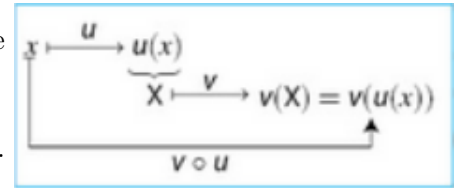
B. Composition de fonctions

B.1 Définition

Définition 2.

u est une fonction définie sur un intervalle I , et v est une fonction définie sur un intervalle J tel que pour tout x de I , on ait $v(x)$ dans J .

La **fonction composée** de u suivie de v (ou de u par v), notée $v \circ u$, (lire « v rond u »), est la fonction définie sur I par $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.



Exemple 1.

u et v sont les fonction dérivables sur $I = \mathbb{R}$ par $u(x) = 2x - 1$ et sur $J = \mathbb{R}$ par $v(x) = x^2$.

La fonction $v \circ u$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(2x - 1) = (2x - 1)^2$.

La fonction $u \circ v$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $(u \circ v)(x) = u(v(x)) = u(x^2) = 2x^2 - 1$.

Exemple 2.

Soient u et v sont les fonctions définies sur $I = \mathbb{R}$ par $u(x) = 2x - 1$ et sur $J = [0; +\infty[$ par $v(x) = \sqrt{x}$.

La fonction $v \circ u$ est définie sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ par $(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(2x - 1) = \sqrt{2x - 1}$.

La fonction $u \circ v$ est définie sur $[0; +\infty[$ par $(u \circ v)(x) = u(v(x)) = u(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} - 1$.

Attention, ici $u(0) = -1 < 0$ donc $v(u(0))$ n'existe pas, et donc $v \circ u$ n'est (en particulier) pas définie en 0.

Propriété 1 (Associativité).

La composée de fonctions est associative.

Soient u, v et w trois fonctions vérifiant les conditions de définition requises alors :

$$w \circ (v \circ u) = (w \circ v) \circ u.$$

Exemple 3.

Soit trois fonctions u, v et w définies par $u : x \mapsto x^2 - 2, v : x \mapsto e^x$ et $w : x \mapsto 1 - x$.

$$\begin{cases} x \mapsto u(x) = x^2 - 2 \\ y \mapsto v(y) = e^y \\ z \mapsto w(z) = 1 - z \end{cases}$$

Donc :

- $(w \circ v)(x) = w(v(x)) = w(e^x) = 1 - e^x$
et par suite, $((w \circ v) \circ u)(x) = (w \circ v)(u(x)) = (w \circ v)(x^2 - 2) = 1 - e^{x^2 - 2}$.
- $(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(x^2 - 2) = e^{x^2 - 2}$ et $w(v \circ u)(x) = w(e^{x^2 - 2}) = 1 - e^{x^2 - 2}$.
et par suite, $(w \circ (v \circ u))(x) = w((v \circ u)(x)) = w(e^{x^2 - 2}) = 1 - e^{x^2 - 2}$.

Donc $w \circ (v \circ u) = (w \circ v) \circ u$.

Propriété 2 (Non commutativité).

La composée de fonctions n'est pas commutative en général :

$$v \circ u \neq u \circ v.$$

Exemple 4.

Soient deux des trois fonctions de l'exemple précédent u et v définies par $u : x \mapsto x^2 - 2$ et $v : x \mapsto e^x$.

Ici, $(u \circ v)(x) = u(v(x)) = u(e^x) = (e^x)^2 - 2 = e^{2x} - 2$.

mais $(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(x^2 - 2) = e^{x^2 - 2}$.

Donc $u \circ v \neq v \circ u$.

B..2 Dérivées des fonctions composées

Théorème 1.

Soit u et v deux fonctions (vérifiant les conditions requises) dérivables de dérivées respectives u' et v' , alors $v \circ u$ est dérivable et sa dérivée s'écrit :

$$(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'.$$

Autrement dit, pour tout réel x vérifiant les conditions de définition requises :

$$(v \circ u)'(x) = (v'(u(x))) \times u'(x).$$

Cas particulier

Soit u une fonction dérivable de dérivée u' et a et b deux réels. Alors la fonction f définie par $f(x) = u(ax+b)$ est dérivable de dérivée f' telle que $f'(x) = au'(ax+b)$. En fait, f est la composée de la fonction affine $x \mapsto ax+b$ par la fonction dérivable u .

Exemple 5.

Soit deux fonctions, $u(x) = 2x^2 - 3$ et $v(x) = \sqrt{x}$, de sorte que $u'(x) = 4x$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

On obtient :

$$(v \circ u)'(x) = (v'(u(x))) \times u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x^2-3}} \times 4x = \frac{2x}{\sqrt{2x^2-3}}.$$

Propriété 3 (Monotonie d'une fonction composée).

- Si v et u sont de même monotonie (c'est à dire toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes), alors la fonction $v \circ u$ est croissante.
- Si v et u sont de monotonie contraire (c'est à dire l'une est croissante et l'autre décroissante), alors la fonction $v \circ u$ est décroissante.

Exemple 6.

1. Dans l'exemple précédent, u et v sont croissantes sur $\mathbb{R}^+$ donc $v \circ u$ l'est aussi sur $\mathbb{R}^+$.
2. Considérons u et v telles que $u(x) = 2x - 3$ et $v(x) = \frac{1}{x}$.

u est croissante et v est décroissante donc $v \circ u$ définie par $v \circ u(x) = \frac{1}{2x-3}$ est décroissante.

Démonstration.

La fonction dérivée de la fonction $v \circ u$ est la fonction notée $(v \circ u)'$ telle que : $(v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$.

- Si u et v sont croissantes alors u' et v' sont positives et $(v \circ u)'$ l'est aussi. Si u et v sont décroissantes alors u' et v' sont négatives et $(v \circ u)'$ est positive. Dans les deux cas $v \circ u$ est croissante.
- Si u est croissante et v est décroissante alors u' est positive et v' est négative donc $(v \circ u)'$ est négative. Si u est décroissante et v est croissante alors u' est négative et v' est positive donc $(v \circ u)'$ est négative. Dans les deux cas $v \circ u$ est décroissante.

B..3 Fonctions usuelles

Propriété 4.

Soit u une fonction dérivable de dérivée u' , a et b des réels et n un entier naturel.

Fonction	Fonction dérivée
$au + b$	$au' + b$
u^2	$2u'u$
u^3	$3u'u^2$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$

Fonction	Fonction dérivée
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	$u'e^u$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$

II. Continuité sur un intervalle

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et un réel a de I .

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a .

Pour tout réel x de I , on considère le point M de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x .

Ainsi, on a : $A(a ; f(a))$ et $M(x ; f(x))$.

A. Notion de continuité

En général, lorsque x est proche de a , le point M est proche du point A , c'est à dire que le réel $f(x)$ est proche du réel $f(a)$. On dit alors que la **fonction f admet pour limite en a le réel $f(a)$** .

La courbe $\mathcal{C}_f$ est alors « sans trou » autour de A , elle ne présente pas de « saut » en A .

Définition 3.

Soit une fonction f définie sur un intervalle I .

- Intuitivement, on dit que la fonction f est **continue en un réel a** de I si :

$f(x)$ se rapproche de $f(a)$ lorsque x se rapproche de a

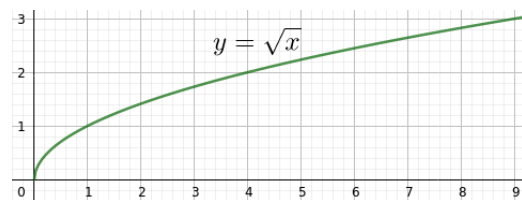
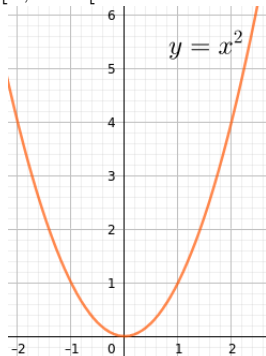
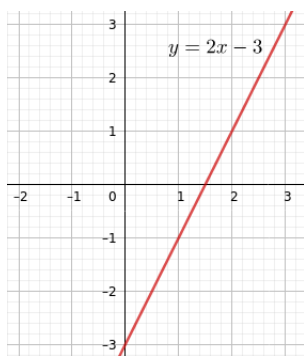
- Mathématiquement, on dit que la fonction f est **continue en un réel a** de I si :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

- On dit que la fonction f est **continue sur I** si f est continue en tout réel a de I .

Exemple 7.

- Les fonctions affine, carré, cube ou encore toute fonction polynomiale sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction racine carrée est continue sur $[0; +\infty[$. Leurs courbes ne présentent jamais de « saut ».



- Certaines fonctions ne possèdent pas cette propriété.

Par exemple, la fonction **partie entière** E est définie sur $\mathbb{R}$ par $E(x) = n$, où n est l'entier relatif tel que $n \leq x < n + 1$.

Ainsi : si $0 \leq x < 1$, alors : $E(x) = 0$,

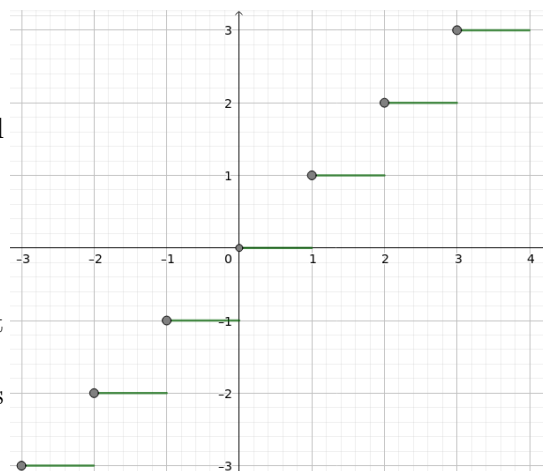
et si $1 \leq x < 2$, alors $E(x) = 1$.

Donc, lorsque x se rapproche de 1 par la gauche, $E(x)$ reste égal à 0 et ne se rapproche PAS de $E(1) = 1$. On écrit encore

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} E(x) = 0 \text{ alors que } E(1) = 1$$

On dit que E est **discontinue** en 1, et de façon générale, en tout entier relatif.

La courbe $\mathcal{C}_E$ est « en escaliers » et présente des sauts en ses points d'abscisses entières.



B. Propriétés

Théorème 2 (admis).

Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I .

Remarque 2.

La réciproque de ce théorème est fautive : les fonctions valeur absolue et racine carrée, par exemple, ne sont pas dérivables en 0, mais sont continues en 0, et respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $[0; +\infty[$.

Conséquence

- Les fonctions « usuelles » (affines, carré, cube, racine carrée, inverse, valeur absolue, et d'autres s'ajouteront au cours de l'année) sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.
- Les fonctions construites à partir de ces fonctions par somme, produit ou composition, sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.

C. Théorème des valeurs intermédiaires

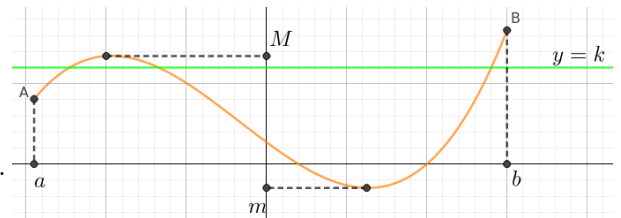
Théorème 3 (admis). Théorème des valeurs intermédiaires

Soit une fonction f **continue** sur un intervalle $[a; b]$.

Alors f atteint son **minimum** m et son **maximum** M ,

et pour tout réel k **compris entre** m et M ,

il **existe** (au moins) un réel c dans $[a; b]$ tel que $f(c) = k$.



La figure ci-dessus illustre le théorème : comme f est continue, la courbe $\mathcal{C}_f$ est « sans trou ».

Pour tout réel k tel que $m \leq k \leq M$, la courbe coupe au moins une fois la droite d'équation $y = k$.

Ici la courbe coupe trois fois la droite horizontale représentée, et dans ce cas l'équation $f(x) = k$ possède trois solutions distinctes.

Théorème 4.

Si la fonction f est **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a; b]$, alors pour tout réel k **compris entre** $f(a)$ et $f(b)$, il **existe** un **unique** réel c dans $[a; b]$ tel que $f(c) = k$.

Démonstration. Soit un réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Comme f est continue sur $[a; b]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel c de $[a; b]$ tel que $f(c) = k$.

- Dans le cas où la fonction f est strictement croissante sur $[a; b]$, on a :

— pour tout $x \in [a; c[$, $f(x) < f(c)$, c'est à dire $f(x) < k$;

— pour tout $x \in]c; b]$, $f(x) > f(c)$, c'est à dire $f(x) > k$.

L'équation $f(x) = k$ n'admet donc pas d'autre solution que c dans l'intervalle $[a; b]$.

- Dans le cas où la fonction f est strictement décroissante sur $[a; b]$, on raisonne de la même façon.

Remarque 3.

- Ce théorème s'étend au cas d'intervalles ouverts ou semi-ouverts, bornés ou non bornés, en remplaçant si besoin $f(a)$ et $f(b)$ par les limites de f en a et b .
- **Convention dans les tableaux de variations**
On convient que les flèches obliques du tableau de variations d'une fonction f traduisent la **continuité** et la **stricte monotonie** de f sur l'intervalle correspondant.
- Il n'y a pas équivalence entre la propriété de la valeur intermédiaire et la continuité. Il existe des fonctions non continues, plus ou moins élaborées, qui satisfont bien la propriété de la valeur intermédiaire.

Exemple 8.

Le tableau de variations d'une fonction permet de dénombrer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.
Par exemple :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	0	-4	$+\infty$

- L'équation $f(x) = -5$ admet une solution x_0 .
- L'équation $f(x) = -1$ admet trois solutions x_1, x_2 et x_3 .

Méthode - ALGORITHMIQUE

Approcher une solution d'une équation $f(x) = k$ par dichotomie

Soit une fonction f continue et strictement **croissante** sur $[a; b]$ et un réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

On sait que l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution c sur $[a; b]$: $a \leq c \leq b$ **(1)**.

On pose $m = \frac{a+b}{2}$, la moyenne de a et b . On a alors :

- soit $f(m) < k$; f étant croissante, on a alors : $m \leq c \leq b$ **(2)** ;
- soit $f(m) \geq k$; f étant croissante, on a alors : $a \leq c \leq m$ **(3)**.

Les encadrements **(2)** et **(3)** de c sont d'amplitude moitié de l'encadrement **(1)**.

En réitérant le procédé en remplaçant $[a; b]$ par $[m; b]$ ou par $[a; m]$, on obtient de proche en proche un encadrement de c d'amplitude aussi petite qu'on le souhaite. L'algorithme ci-dessous affiche les valeurs extrêmes d'un encadrement de c d'amplitude inférieure à 10^{-n} , pour f strictement **croissante** sur $[a; b]$.

(On raisonne de façon analogue dans le cas où f est strictement décroissante.)

```

{ Variables :  $a, b, k, m$  réels, et  $n$  : entier
  Début
    Entrer( $a, b, n, k$ ) ;
    TantQue  $b - a > 10^{-n}$  Faire
       $m \leftarrow \frac{a+b}{2}$  ;
      Si  $f(m) < k$ 
        Alors  $a \leftarrow m$  ;
      Sinon  $b \leftarrow m$  ;
      FinSi ;
    FinTantQue ;
    Afficher( $a, b$ ) ;
  Fin.

```

```

1  from math import*
2
3  def f(x):
4      return x*e**x-1
5
6  def dichotomie(a,b,n):
7      for i in range(n):
8          m=(a+b)/2
9          if f(a)*f(m)<0:
10             b=m
11          else:
12             a=m
13      return [a,b]
14
15  """ Utilisation sur la fonction f
16  définie au dessus.
17  En sortie on a l'intervalle (liste)
18  encadrant la solution de f(x)=0,
19  après n itérations. """

```

```

1  def dichotomie(chaine_x,a,b,epsilon):
2      """ Données : f continue sur un intervalle,
3      (chaine_x contient l'expression de la fonction)
4      a et b tels que f(a)f(b) <=0
5      Résultat : une approximation à epsilon près
6      d'une solution de l'équation f(x)=0 obtenue par dichotomie.
7      Affiche le nombre d'itérations effectuées."""
8
9      g, d = min(a,b), max(a,b)
10     x = g
11     valg = eval(chaine_x)
12     x = d
13     vald = eval(chaine_x)
14     n = 0
15     while d-g > epsilon:
16         n += 1
17         x = (g+d)/2
18         valm = eval(chaine_x)
19         if valg * valm < 0 :
20             d = x
21             vald = valm
22         else:
23             g = x
24             valg = valm
25     print("nombre d'itérations nécessaires :", n)
26     return (g+d)/2
27
28     print(dichotomie("x**2 - 2" , 0, 2, 1e-10))
29     """ Exemple d'utilisation avec f(x)=x^2-2 sur [0;2]
30     et un écart souhaité de 10^(-10) à la solution de f(x)=0
31     ce test fournit donc une approximation de racine(2)"""

```