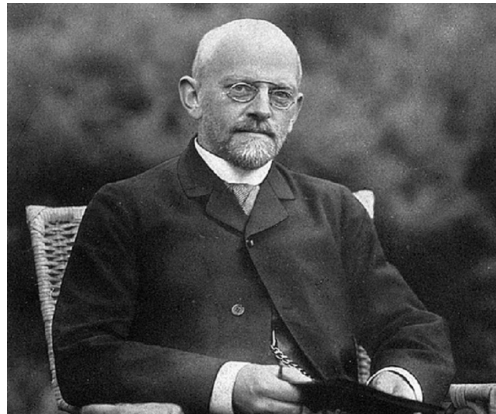


CHAPITRE 10 - PRODUIT SCALAIRE ÉQUATIONS CARTÉSIENNES DE PLANS



DAVID HILBERT est unanimement reconnu comme la figure emblématique des maths du XX^{ème} siècle. Son œuvre est immense, comparable à celle de POINCARÉ. Surtout, Hilbert a donné l'impulsion de nombreuses recherches mathématiques du XX^{ème} siècle, et a créé une école allemande qui domina trente années durant. Hilbert est né le 23 janvier 1862 à Königsberg, d'une famille bourgeoise. Il fait sa thèse à l'université de la même ville, sous la direction de LINDEMANN, le mathématicien auquel on doit la première preuve de la transcendance de π . C'est à cette époque qu'il se lie avec MINKOWSKI, qui restera son ami toute sa vie. C'est en 1895 que Hilbert rejoint l'université de Göttingen, qu'il ne quittera plus malgré de nombreuses propositions. Il fit de cette université le centre nerveux des mathématiques du début du XX^{ème} siècle. Il aura pour élèves Hermann WEYL, ainsi que le champion d'échecs LASKER. Il se consacre alors à faire le point, avec son ami Minkowski, sur la théorie algébrique des nombres, et dans son ouvrage « Zahlbericht », il réalise une brillante synthèse d'idées de KUMMER, KRONECKER, DEDEKIND, et des ses propres travaux. Il publie aussi « Grundlagen der Geometrie », où il inaugure la méthode axiomatique en donnant une formulation rigoureuse de la géométrie euclidienne.

Le 8 août 1900, au Second Congrès International des Mathématiciens réuni à Paris, David Hilbert a profondément changé la face des mathématiques. Et pourtant, ce jour-là, il n'a annoncé aucun théorème nouveau, aucun résultat. Rien de tout cela. Au contraire même, ce jour-là, Hilbert a posé 23 problèmes à la communauté des mathématiciens. Ces problèmes ont été le moteur de nombreuses recherches tout au long du siècle dernier. Dans une conférence restée un morceau d'anthologie (HERMITE dira : « On n'entendra plus dans les congrès de conférences pareilles »), Hilbert essaie de deviner le futur d'une science. La plupart des 23 problèmes furent effectivement au cœur de nombreuses recherches depuis lors, même s'il en reste 3 ouverts à l'heure actuelle.

Le nom de Hilbert est cependant connu des étudiants surtout pour ses célèbres « espaces de Hilbert », qu'il est amené à introduire vers 1909, au cours de son travail sur des équations intégrales. Ensuite, Hilbert se consacre surtout au développement de l'école de pensée dite formaliste, par opposition à l'école intuitionniste de Poincaré et BROUWER. Les intuitionnistes ne reconnaissaient que les preuves d'existence de nature constructive, et refusaient les méthodes axiomatiques de Hilbert. Si ces mathématiques intuitionnistes gardent un grand intérêt, c'est la pensée axiomatique d'Hilbert qui peu à peu va devenir dominante, jusqu'à son influence sans doute excessive dans l'enseignement des « mathématiques modernes ».

I. Produit scalaire du plan à l'espace

A. Extension du produit scalaire à l'espace

On étend aux vecteurs de l'espace la définition du produit scalaire dans le plan vue en classe de Première.

Définition 1.

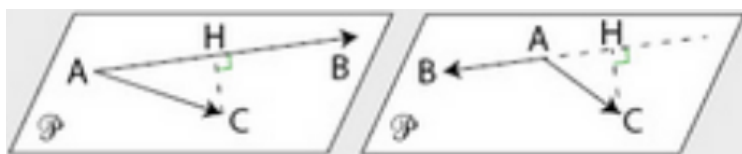
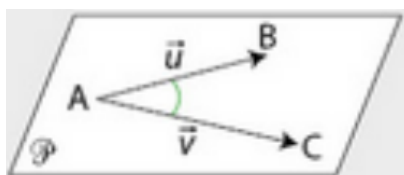
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace. A, B et C sont trois points de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Il existe au moins un plan $\mathcal{P}$ contenant les points A, B et C.

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ calculé dans le plan $\mathcal{P}$.

Propriété 1.

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs non nuls de l'espace.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$
- Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$



Définition 2.

Le carré scalaire d'un vecteur $\vec{u}$, noté $\vec{u}^2$, est le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}$.

Ainsi, pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ et pour tous points A et B, $\overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$.

B. Extension des propriétés algébriques

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace et k est un nombre réel.

Propriété 2.

$\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ équivaut à $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Remarque 1.

Le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur de l'espace.

Propriété 3 (Symétrie et bilinéarité).

$$(1) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \qquad (2) \quad \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) \qquad (3) \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Remarque 2.

La bilinéarité n'est pas une extension banale du plan à l'espace ; en effet, les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas nécessairement coplanaires. On en verra une démonstration en exercice.

Propriété 4.

$$(1) \quad (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \qquad (2) \quad (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

En effet, ces formules se déduisent des développements de $(\vec{u} + \vec{v})^2$ et $(\vec{u} - \vec{v})^2$.

Propriété 5 (Formule de polarisation).

$$\bullet \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2] \qquad \bullet \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2].$$

Ces formules se déduisent immédiatement de la propriété précédente.

En particulier, pour trois points A, B, C de l'espace, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2)$.

II. Base orthonormée, repère orthonormé

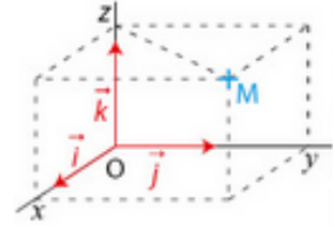
A. Bases et repères orthonormés

Définition 3.

- Dire qu'une **base** $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est **orthonormée** signifie que ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux et de même norme choisie pour unité :

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1.$$

- O étant un point de l'espace, le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthonormé** lorsque la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée.



B. Expression analytique du produit scalaire

Propriété 6.

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Démonstration.

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$, donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$.
D'où, $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx'\vec{i}^2 + yy'\vec{j}^2 + zz'\vec{k}^2 + (xy' + yx')\vec{i} \cdot \vec{j} + (xz' + zx')\vec{i} \cdot \vec{k} + (zy' + yz')\vec{j} \cdot \vec{k}$.
 $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée, donc $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ et $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$, donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Exemple 1.

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times (-2) + 4 \times 5 + 0 \times 1 = 18$.

Propriété 7.

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs.

(1) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** équivaut à $xx' + yy' + zz' = 0$ (2) $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Exemple 2.

- Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux car $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 1 + (-2) \times 3 + 5 \times 1 = 0$.
- Si $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

Propriété 8.

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ sont deux points.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Exemple 3.

$A(-1; 5; 3)$ et $B(9; 5; -2)$ sont deux points dans un repère orthonormé.

La longueur AB est égale à : $AB = \sqrt{(9 + 1)^2 + (5 - 5)^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

III. Orthogonalité dans l'espace

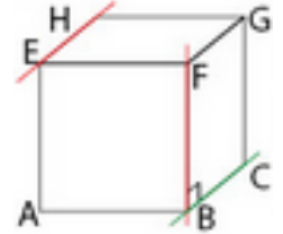
A. Orthogonalité de deux droites

Définition 4.

Dire que deux droites sont **orthogonales** signifie que leurs parallèles passant par un même point quelconque sont perpendiculaires.

Exemple 4.

Dans ce cube ABCDEFGH, les droites (BF) et (EH) sont orthogonales car la parallèle (BC) à la droite (EH) est perpendiculaire en B à la droite (BF).



Propriété 9.

Deux **droites** d et d' de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont **orthogonales** si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$.

Démonstration.

A est un point de l'espace. Δ et Δ' sont les parallèles aux droites d et d' passant par A. Les droites Δ et Δ' admettent respectivement $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ comme vecteurs directeurs. Par définition, les droites d et d' sont orthogonales si, et seulement si Δ et Δ' sont perpendiculaires, c'est à dire $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$.

B. Orthogonalité d'une droite et d'un plan

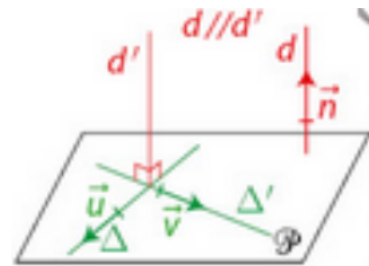
Définition 5.

Dire qu'une droite est **orthogonale** à un plan signifie qu'elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

Propriété 10.

Une droite d est **orthogonale** à un plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si, elle est orthogonale à **deux droites sécantes** de ce plan. Autrement dit :

Une droite d de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si, il existe deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de ce plan tels que $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.



Démonstration.

- On suppose que d est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$, c'est à dire que d est orthogonale à toute droite de ce plan. En particulier, d est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. Ce qui équivaut à dire qu'il existe deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{P}$ tels que $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.
- Réciproquement, on suppose qu'il existe deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{P}$ tels que $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.

On note $\mathcal{D}$ une droite quelconque de vecteur directeur $\vec{w}$ contenue dans ce plan. Ainsi, les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, donc il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

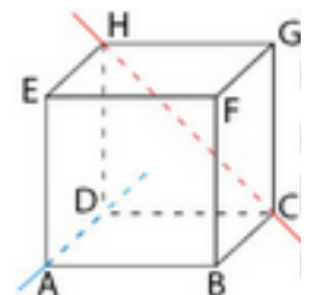
Ainsi, $\vec{n} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\vec{n} \cdot \vec{u} + \beta\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$. Donc toute droite $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}$ est orthogonale à d .

Ainsi d est orthogonale à $\mathcal{P}$.

Exemple 5.

ABCDEFGH est un cube.

- La droite (DA) est perpendiculaire aux deux droites sécantes (DC) et (DH) du plan (DCH). Donc la droite (DA) est orthogonale au plan (DCH).
- La droite (DA) est orthogonale au plan (DCH), elle est donc orthogonale à toute droite du plan (DCH), en particulier à la droite (HC).

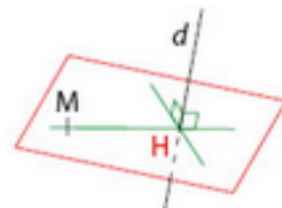


IV. Projections orthogonales dans l'espace

A. Projection orthogonale d'un point sur une droite

Définition 6.

Le **projeté orthogonal** d'un point M sur une droite d est le point d'intersection H de d avec le plan passant par M et orthogonal à d .



Remarque 3.

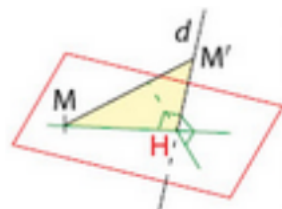
- Le plan passant par M et orthogonal à d est unique.
- Lorsque $M \in d$, le projeté orthogonal de M sur d est le point M .

Propriété 11.

Le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite d est le point de d **le plus proche** de M .
On dit que MH est la **distance** du point M à la droite d .

Démonstration.

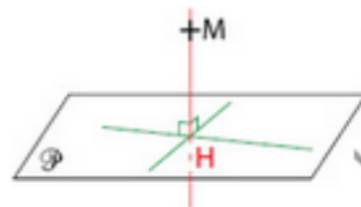
- Si $M \in d$, alors $MH = 0$ et H est le point de d le plus proche de M .
- Si $M \notin d$, alors pour tout point M' de d , le triangle MHM' est rectangle en H , donc son hypoténuse est le côté le plus long, soit $MM' > MH$.
Donc H est le point de d le plus proche de M .



B. Projection orthogonale d'un point sur un plan

Définition 7.

Le **projeté orthogonal** d'un point M sur un plan $\mathcal{P}$ est le point d'intersection H du plan $\mathcal{P}$ et de la droite passant par M orthogonale à $\mathcal{P}$.



Remarque 4.

Lorsque $M \in \mathcal{P}$, le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ est le point M .

Propriété 12.

Le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite d est le point de d **le plus proche** de M .
On dit que MH est la **distance** du point M à la droite d .

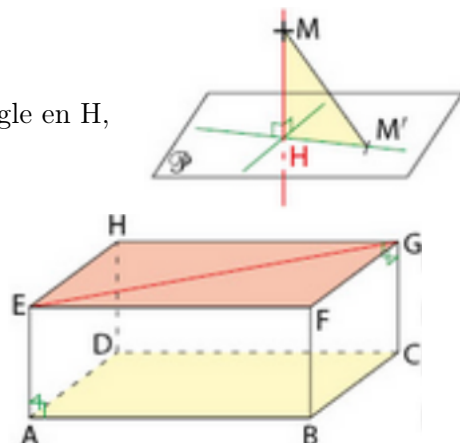
Démonstration.

- Si $M \in \mathcal{P}$, alors $MH = 0$ et H est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M .
- Si $M \notin \mathcal{P}$, alors pour tout point M' de $\mathcal{P}$, le triangle MHM' est rectangle en H , donc son hypoténuse est le côté le plus long, soit $MM' > MH$.
Donc H est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M .

Exemple 6.

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.

- Le projeté orthogonal du point E sur le plan (ABC) est le point A .
En effet, la droite (EA) est orthogonale au plan (ABC) .
- Le projeté orthogonal du point E sur la droite (CG) est le point G .
En effet, le plan (EFG) est orthogonal à la droite (CG) et passe par E .



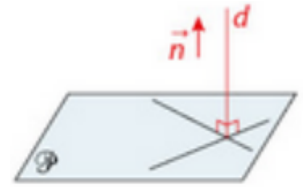
V. Équations cartésiennes d'un plan

A. Vecteur normal à un plan

Définition 8.

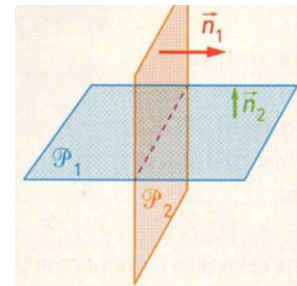
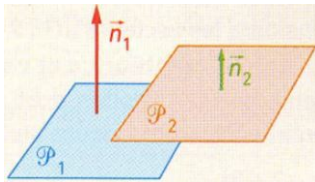
Dire qu'un vecteur non nul $\vec{n}$ est **normal** à un plan $\mathcal{P}$ signifie que toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

Dit autrement, un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à un plan $\mathcal{P}$ s'il est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}$.



Propriété 13.

- Soient $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ deux vecteurs de l'espace.
Si $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont normaux au même plan $\mathcal{P}$, alors $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires.
- Soient $\mathcal{P}_1$ un plan de vecteur normal $\vec{n}_1$ et $\mathcal{P}_2$ un plan de vecteur normal $\vec{n}_2$.
 - $\mathcal{P}_1$ est parallèle à $\mathcal{P}_2$ si et seulement si $\vec{n}_1$ est colinéaire à $\vec{n}_2$.
 - $\mathcal{P}_1$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}_2$ si et seulement si $\vec{n}_1$ est orthogonal à $\vec{n}_2$.



Propriété 14 (Caractérisation des points d'un plan).

A est un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est le plan $\mathcal{P}$ passant par A, de vecteur normal $\vec{n}$.

Démonstration.

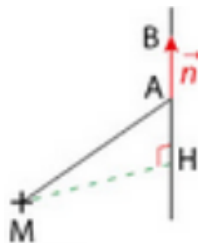
On note B le point distinct de A tel que $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$ et H le projeté orthogonal d'un point M sur la droite (AB).

Avec ces notations : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ si, et seulement si $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, c'est-à-dire $A = H$ car les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Autrement dit, $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ si, et seulement si, A est le projeté orthogonal de M sur la droite (AB).

L'ensemble cherché est donc le plan passant par A et orthogonal à (AB).



B. Équation cartésienne d'un plan

Propriété 15.

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient a, b , et d quatre réels avec a, b et c non simultanément nuls, c'est à dire que $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$.

L'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Démonstration (exigible).

On considère l'ensemble $\mathcal{P}$ des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$.

a, b et c sont trois réels tels que $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$. Par exemple, on peut supposer $a \neq 0$.

Le point $M_0 \left(-\frac{d}{a}; 0; 0 \right)$ appartient à $\mathcal{P}$, en effet : $a \times -\frac{d}{a} + b \times 0 + c \times 0 + d = -d + d = 0$.

On pose $x_0 = -\frac{d}{a}$, $y_0 = 0$ et $z_0 = 0$. Soit $M(x; y; z)$ un point de $\mathcal{P}$. On a alors :

$$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow ax + by + cz + d = a \times x_0 + b \times y_0 + c \times z_0 + d$$

$$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0 \text{ si on pose } \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

C'est la propriété caractéristique d'un plan.

Donc M appartient au plan passant par le point M_0 et de vecteur normal $\vec{n}$.

Propriété 16.

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Tout plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet une équation de la forme

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Démonstration.

$\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$, donc $n \neq \vec{0}$, donc a, b et c ne sont pas simultanément nuls.

Soit $M(x; y; z)$ un point de $\mathcal{P}$. On a :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x - x_A)a + (y - y_A)b + (z - z_A)c = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 \text{ après avoir posé } d = -ax_A - by_A - cz_A$$

Cas particuliers des plans (xOy) , (yOz) et (xOz)

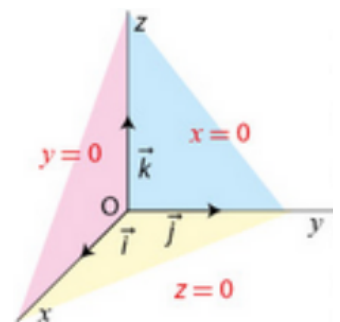
- Le plan (xOy) passe par l'origine $O(0; 0; 0)$ du repère et le vecteur $\vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à ce plan.

Ainsi, une équation cartésienne du plan (xOy) est de la forme $0x + 0y + 1z + d = 0$.

Or, $O(0; 0; 0)$ appartient à (xOy) donc $1 \times 0 + d = 0$ et $d = 0$.

Ainsi, une équation cartésienne du plan (xOy) est $z = 0$.

- De même, le plan (yOz) a pour équation cartésienne $x = 0$ et le plan (xOz) a pour équation cartésienne $y = 0$.



VI. Calculs de distance

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

Propriété 17 (Distance d'un point à un plan).

Soit A un point de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace.

- Le projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{P}$ réalise la distance entre le point A et le plan $\mathcal{P}$:

$$d(A, \mathcal{P}) = AH$$

- Si $\vec{n}$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$ et B est un point quelconque de $\mathcal{P}$, alors la distance entre le point A et le plan $\mathcal{P}$ est donnée par :

$$d(A, \mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}.$$

- Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, alors la distance entre le point A et le plan $\mathcal{P}$ est donnée par :

$$d(A, \mathcal{P}) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Pour une preuve de ce résultat, voir la « Liste des démonstrations exigibles ».

Exemple 7.

La distance entre $C(1; 2; -1)$ et le plan d'équation cartésienne $2x - 3 + z - 1 = 0$ vaut :

$$\frac{|2 \times 1 - 3 \times 2 + 1 \times (-1) - 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{14}} = \frac{6\sqrt{14}}{14} = \frac{3\sqrt{14}}{7}.$$

Propriété 18 (Distance d'un point à une droite).

Soient A un point de l'espace et d une droite de l'espace passant par un point B et de vecteur directeur $\vec{u}$.

- Le projeté orthogonal H de A sur la droite d est le point de la droite d le plus proche de A.
- La distance AH est appelée la **distance du point A à la droite d** , et on a :

$$AH = \left\| \overrightarrow{AB} - \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} \right\|.$$

Exemple 8.

On considère la droite de représentation paramétrique $d : \begin{cases} x = 2 + 3k \\ y = -1 + k \\ z = -2k \end{cases}$.

Elle est dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et passe par $B(2; -1; 0)$.

La distance entre $A(-1; 2; 1)$ et la droite d est :

$$\begin{aligned} AH &= \left\| \overrightarrow{AB} - \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{3 \times 3 + (-3) \times 1 + (-1) \times (-2)}{3^2 + 1^2 + (-2)^2} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{4}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{9}{7}\right)^2 + \left(\frac{-25}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{707}}{7}. \end{aligned}$$

