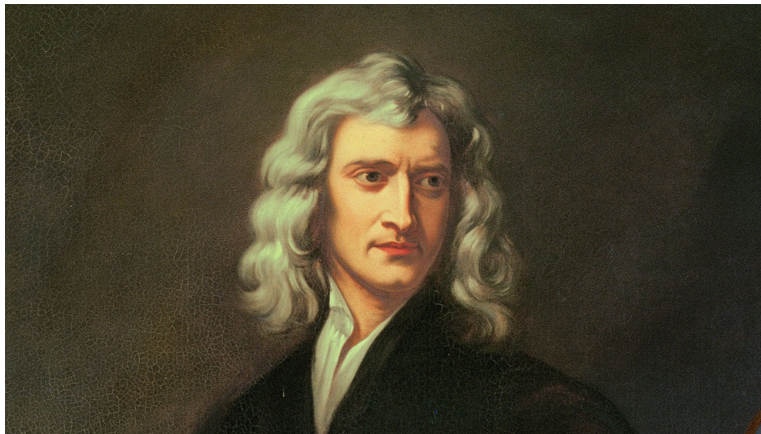


CHAPITRE 11 - PRIMITIVES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES



On connaît en général de la vie de Newton l'épisode (légendaire ?) de la pomme qui lui aurait suggéré la théorie de la gravitation. Mais on oublie souvent que ce génial physicien fut aussi un brillant mathématicien, à l'époque où les frontières entre les sciences étaient peu marquées.

Isaac NEWTON est né à Woolsthorpe (Angleterre) le 25 décembre 1642, année de la mort de GALILÉE. Ses parents sont fermiers, mais son père décède deux mois avant sa naissance. Sa mère se remarie, et il semble que l'enfance de Newton, envoyé chez sa grand-mère, ne soit pas très heureuse. A l'école publique de Grantham, Newton est un élève peu attentif. Vers 16 ans, il est rappelé par sa mère pour s'occuper du domaine familial, mais ce travail ne lui convient guère, et il retourne à l'école pour préparer son entrée à l'Université. STOKES est le premier à déceler chez Newton un talent prometteur, et il l'aide à entrer au Trinity College de Cambridge en 1661. Là-bas, en dehors des cours de philosophie cartésienne, Newton s'intéresse personnellement à l'astronomie, et donc aux mathématiques car il lui manque de nombreuses notions géométriques pour comprendre les travaux de HALLEY.

L'œuvre majeure de Newton est le *Philosophiæ naturalis principia mathematica* paru en 1687, qui marque le sommet de la pensée newtonienne. Les *Principia* marquent les débuts de la mathématisation de la physique. Ils comportent tous les fondements principaux de la mécanique classique : égalité de l'action et de la réaction, principe d'inertie, et surtout loi de gravitation universelle : deux corps s'attirent avec une force proportionnelle au produit de leur masse et inversement proportionnelle au carré de leur distance. En mathématiques, outre la classification des coniques et la formule du binôme pour des exposants non entiers, Newton est considéré comme le co-inventeur du calcul infinitésimal, appelé par lui méthode des fluxions. Ce calcul infinitésimal est envisagé à travers la cinématique, alors que chez LEIBNIZ il procède de la géométrie. La dérivation est encore envisagée de manière intuitive, mais les jalons de l'analyse moderne sont posés.

Newton était sans doute une personnalité complexe et tourmentée. Il répugne à communiquer aux autres scientifiques ses découvertes, ce qui lui vaudra quelques violentes querelles de priorité avec HOOKE (pour la gravitation universelle) et Leibniz (au sujet du calcul infinitésimal). Il consacre beaucoup de temps à l'alchimie, à la théologie. En 1693, Newton souffre d'une grave crise de dépression nerveuse, qui lui fait abandonner toute recherche nouvelle, au profit d'une synthèse et des perfectionnements de ses résultats antérieurs. Il occupe également des fonctions administratives prestigieuses : il est nommé directeur de la Monnaie, et en 1703, il est élu Président de la Royal Society. Annobli en 1705, il décède le 19 mars 1727 à Londres, et il est inhumé à l'abbaye de Westminster, aux côtés des rois d'Angleterre.

I. Primitives et équations différentielles $y' = f$

A. Lien entre équation différentielle $y' = f$ et primitive de f

Définition 1.

- Une **équation différentielle** est une équation où l'inconnue est une fonction et où interviennent des dérivées de cette fonction.
- **Résoudre** une équation différentielle, c'est trouver **toutes** les fonctions solutions de l'équation.

Définition 2.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

F est une **primitive de f sur I** si F est dérivable sur I et si $F' = f$.

Exemple 1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x - 3$.

La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 2x^2 - 3x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Remarque 1.

En Terminale, les trois formulations suivantes sont donc équivalentes :

- F est une primitive de f ;
- f est la dérivée de F ;
- F est solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Théorème 1.

Si f est une fonction continue sur un intervalle I , alors f admet des primitives sur I .

Remarque 2.

Ce théorème est temporairement admis, et sera démontré au Chapitre 15, lorsque la notion d'intégrale aura été développée.

B. Primitives d'une même fonction

Propriété 1.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit F une primitive de f sur I .

- Pour tout réel C , la fonction $G : x \mapsto F(x) + c$ est aussi une primitive de f sur I .
- Toute primitive de la fonction f sur I est de ce type.

On dit aussi que « deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante ».

Démonstration.

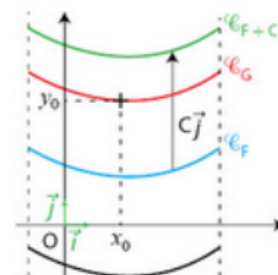
- G est dérivable sur I et pour tout réel x de I , $G'(x) = F'(x) = f(x)$ donc G est aussi une primitive de f sur I .
- On suppose que H est une primitive de f sur I , alors H est dérivable sur I et $H' = f$.
Or, $F' = f$ donc $(H - F)' = H' - F' = f - f = 0$ sur I . Ainsi, la fonction $H - F$ est constante sur I .
Donc il existe un réel C tel que pour tout réel x de I , $H(x) - F(x) = C$, soit $H(x) = F(x) + C$.

Propriété 2.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Quels que soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une **unique primitive** G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.

Démonstration.

Avec les notations précédentes, $G(x_0) = y_0$ s'écrit $F(x_0) + C = y_0$ soit $C = y_0 - F(x_0)$.
Donc $G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$ et G est définie de façon unique.



II. Formulaire de primitives

A. Primitives des fonction usuelles

Des primitives sont obtenues par lecture inverse du tableau des dérivées.

Fonction $f : x \mapsto \dots$	Une primitive $F : x \mapsto \dots$	Sur l'intervalle $I = \dots$
k (constante)	kx	$\mathbb{R}$
x^n , où $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	Si $n > 0 : \mathbb{R}$ et si $n \leq -2 :]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$] - \infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0; +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

B. Primitives et opérations sur les fonctions

Théorème 2.

Soit f et g deux fonctions admettant respectivement F et G comme primitives sur un intervalle I et soit λ un réel.

$F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I et λF est une primitive de λf sur I .

Exemple 2.

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

La fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2\sqrt{x}$ est donc une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

C. Primitives et composition

Propriété 3.

u est une fonction dérivable sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J et v une fonction dérivable sur l'intervalle J . Une **primitive** sur I de la fonction $u' \times (v' \circ u)$ est la fonction $v \circ u$.

u est une fonction dérivable sur un intervalle I .

Par lecture des formules de dérivées, on obtient :

Fonction f	Primitives de u sur I	Conditions sur u
$u'u^n$ (avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0\}$)	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + C$	$u(x) \neq 0$ pour tout x de I si $n \leq -2$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u) + C$	$u(x) > 0$ pour tout x de I
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + C$	$u(x) \neq 0$ pour tout x de I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$	$u(x) > 0$ pour tout x de I
$u' \sin(u)$	$-\cos(u) + C$	
$u' \cos(u)$	$\sin(u) + C$	
$u'e^u$	$e^u + C$	

III. Équations différentielles

A. Équations différentielles $y' = ay$

Propriété 4.

Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (avec a nombre réel non nul) sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = ke^{ax} \text{ où } k \text{ est un nombre réel.}$$

Démonstration.

- La fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^{ax}$, avec k un nombre réel, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_k(x) = kae^{ax}$, donc $f'_k(x) = af_k(x)$ et f_k est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
- Réciproquement, on considère une solution g sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay$.

On note ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = g(x)e^{-ax}$.

La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

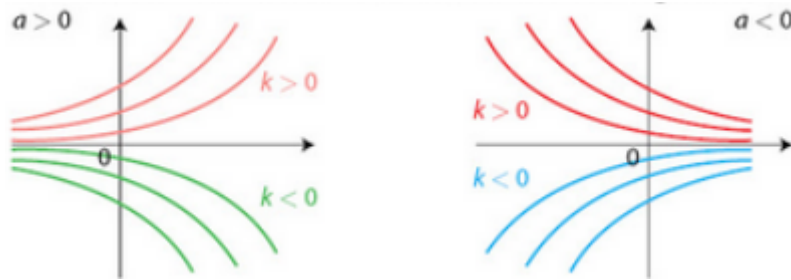
$$\text{pour tout réel } x, \phi'(x) = g'(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} = (g'(x) - ag(x))e^{-ax}.$$

Or, pour tout réel x , $g'(x) = ag(x)$ donc $\phi'(x) = 0$.

Ainsi ϕ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$ et il existe un réel k tel que pour tout réel x , $\phi(x) = k$, soit $g(x)e^{-ax} = k$.

On en déduit que pour tout réel x , $g(x) = ke^{ax}$.

Allure des courbes des fonctions solutions selon les signes de a et de k



B. Équations différentielles $y' = ay + b$

Propriété 5.

Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (avec a et b des nombres réels non nuls) sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}, \text{ où } k \text{ est un nombre réel.}$$

Démonstration.

- On détermine d'abord une fonction constante $f : x \mapsto k$ solution particulière de l'équation différentielle $y' = ay + b$.

Pour tout réel x , $f'(x) = 0$. Ainsi, f est solution de $y' = ay + b$ si, et seulement si $0 = ak + b$, soit $k = -\frac{b}{a}$.

Donc pour tout réel x , $f(x) = -\frac{b}{a}$.

- g est solution de $y' = ay + b$ si, et seulement si, $g' = ag + b$. Or, on sait que $f' = af + b$. Ainsi, g est solution de $y' = ay + b$ si, et seulement si $g' - f' = a(g - f)$, c'est à dire $(g - f)' = a(g - f)$. Autrement dit, g est solution de $y' = ay = b$ si, et seulement si $g - f$ est solution de $y' = ay$, c'est-à-dire pour tout réel x , $g(x) - f(x) = ke^{ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

En conclusion, les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay + b$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$.

C. Équations différentielles $y' = ay + b(x)$

On généralise la méthode de résolution vue dans la démonstration précédente aux équations différentielles du type $y' = ay + b(x)$ avec a nombre réel non nul et b fonction donnée.

Propriété 6.

Les fonctions solutions de l'équation différentielle (E) : $y' = ay + b(x)$, où b n'est plus une constante mais une fonction de la variable x définie sur $\mathbb{R}$, sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = ke^{ax} + b_0(x), \text{ où :}$$

- k est une constante réelle ;
- et b_0 est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

Démonstration.

- Une solution particulière constante n'existant pas nécessairement, une autre solution particulière sera soit donnée, soit à déterminer à l'aide d'indications.

Pour la démonstration, nous supposons qu'une telle solution particulière existe et la notons b_0 .

- f est solution de (E) : $y' = ay + b(x)$ si, et seulement si, $f' = af + b(x)$. Or, on sait que b_0 est solution de (E), donc $b_0' = ab_0 + b(x)$.

Ainsi, f est solution de $y' = ay + b(x)$ si, et seulement si $f' - b_0' = af - ab_0$, c'est à dire $(f - b_0)' = a(f - b_0)$.

Autrement dit, f est solution de $y' = ay + b(x)$ si, et seulement si $f - b_0$ est solution de (E') : $y' = ay$, c'est-à-dire pour tout réel x , $f(x) - b_0(x) = ke^{ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

En conclusion, les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay + b$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{ax} + b_0(x)$.

Remarque 3.

En notant (E) l'équation $y' = ay + b(x)$ et (E') l'équation $y' = ay$, dite équation homogène associée, on peut retenir la propriété générale suivante :

$$\text{solution générale de (E)} = \text{solution générale de (E')} + \text{solution particulière de (E)}$$

Exemple 3.

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = -2y + 4x + 6$.

1. Vérifier que la fonction b_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $b_0(x) = 2x + 2$ est une solution particulière de (E).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'une part $b_0'(x) = 2$, et d'autre part $-2b_0(x) + 4x + 6 = -2(2x + 2) + 4x + 6 = 2$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $b_0'(x) = -2b_0(x) + 4x + 6$, et donc b_0 est bien solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

Il suffit d'appliquer le cours : les solutions de l'équation (E) sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = ke^{-2x} + 2x + 2, \text{ où } k \text{ est une constante réelle}$$

Remarquez que :

- pour $k = 0$, on retrouve la solution particulière $f_0 = b_0$;
- et par exemple, pour $k = 7$ on obtient la solution définie sur $\mathbb{R}$ par $f_7(x) = 7e^{-2x} + 2x + 2$;
- En notant (E') : $y' = -2y$ l'équation homogène associée à (E), on a bien que la solution générale f_k de (E) s'exprime comme somme de la solution générale de (E'), ici $x \mapsto ke^{-2x}$ et d'une solution particulière de (E), ici $b_0 : x \mapsto 2x + 2$.