

CHAPITRE 12 - COMBINATOIRE ET DÉNOMBREMENT



BLAISE PASCAL (1623-1662) est un mathématicien et philosophe français. En 1654, dans le *Traité du triangle arithmétique*, il présente un procédé de calcul des combinaisons de proche en proche : ce procédé semble connu des Arabes dès le 11^{ème} siècle et des Chinois au 13^{ème} siècle.

Un peu d'histoire...

La combinatoire étudie le nombre de façons différentes de choisir des éléments dans une collection. Dès le 3^{ème} siècle, une formule du nombre de façons de choisir deux éléments distincts parmi n est attestée.

En 1150, le mathématicien indien BHASKARA connaît la formule générale des combinaisons (choix de p éléments distincts parmi n).

Au début du 14^{ème} siècle, le philosophe LEVI BEN GHERSON, qui a vécu dans le sud de la France, connaît les arrangements (nombre de choix de p éléments ordonnés pris parmi n).

Au 17^{ème} siècle, Blaise Pascal et PIERRE DE FERMAT retrouvent la formule des combinaisons. Les notations « à la française » C_n^p pour les combinaisons et A_n^p pour les arrangements apparaissent en 1904 dans l'*Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées* publiée par JULES MOLK.

I. Ensembles finis

A. Principe additif

Définition 1.

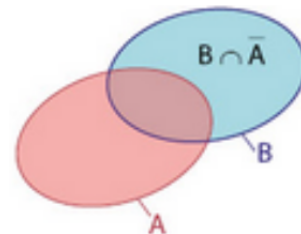
Un **ensemble fini** est un ensemble qui possède un nombre fini d'éléments.

Propriété 1 (Principe additif).

Si A et B sont **deux parties disjointes** d'un ensemble fini E , constituées respectivement de m et n éléments, alors le nombre d'éléments de la **réunion** $A \cup B$ est la somme $m + n$.

Notation et cas général : $\text{Card}(A)$ (lire « cardinal de A ») désigne le nombre d'éléments d'une partie A d'un ensemble fini E . Pour toutes parties A et B de E :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$



En effet, $A \cup B$ est la réunion des ensembles disjoints A et $B \cap \bar{A}$.

Ainsi, $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B \cap \bar{A}) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

B. Principe multiplicatif

Définition 2.

Le **produit cartésien** de deux ensembles finis E et F , noté $E \times F$, est l'ensemble des **couples** $(x ; y)$ où x est un élément de E et y un élément de F .

Exemple 1.

$E = \{a ; b\}$ et $F = \{1 ; 2 ; 3\}$.

$E \times F = \{(a ; 1) ; (a ; 2) ; (a ; 3) ; (b ; 1) ; (b ; 2) ; (b ; 3)\}$.

On peut représenter cela grâce au tableau croisé ci-contre ou à un arbre.

E \ F	F		
	1	2	3
a	(a ; 1)	(a ; 2)	(a ; 3)
b	(b ; 1)	(b ; 2)	(b ; 3)

Propriété 2 (Principe multiplicatif).

Si E et F sont deux ensembles finis constitués respectivement de m et n éléments, alors $E \times F$ est un ensemble fini dont le nombre d'éléments est le **produit** $m \times n$.

En effet, un tableau avec m lignes ou n colonnes contient mn cases.

C. Ensemble des k -uplets (ou k -listes) d'un ensemble fini E

Définition 3.

E est un ensemble fini à n éléments, k est un nombre entier naturel non nul.

Un **k -uplet** d'éléments de E est une **liste ordonnée** de k éléments de E , distincts ou confondus.

L'ensemble de tous les k -uplets de E est l'ensemble $\underbrace{E \times E \cdots \times E}_{k \text{ fois}}$; on le note E^k .

Exemple 2.

$E = \{a ; b ; c\}$. L'arbre ci-dessous permet de lister les triplets de E^3 .

Notez que $(a ; b ; a) \in E^3$ et que $(b ; c ; a)$ et $(c ; a ; b)$ sont des triplets différents de E^3 .



Propriété 3.

k est un nombre entier naturel, $k \geq 1$ et E un ensemble fini à n éléments ($n \in \mathbb{N}$).

Le nombre de k -uplets de E est n^k , c'est à dire $\text{Card}(E^k) = n^k$.

Démonstration.

Immédiate par récurrence.

II. Nombre de parties d'un ensemble

A. Ensemble des parties d'un ensemble

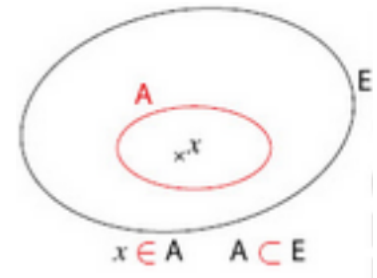
• **Signe d'inclusion** : E et A sont deux ensembles.

La notation $A \subset E$ (lire « A est inclus dans E ») signifie que tout élément de A appartient à E .

Autrement dit, A est une **partie** (ou sous-ensemble) de E .

• On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties d'un ensemble E .

L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est une partie de tout ensemble.



Exemple 3.

— Les parties de l'ensemble $E = \{a ; b\}$ ont :

- 0 élément : $\emptyset$
- 1 élément : $\{a\}, \{b\}$
- 2 éléments : $\{a ; b\}$.

Donc E a 4 parties et $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset ; \{a\} ; \{b\} ; \{a ; b\}\}$.

— L'ensemble vide $E = \emptyset$ a une partie à 0 élément, $\emptyset$ lui même, donc $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$.

B. Nombre de parties d'un ensemble

Propriété 4.

n désigne un nombre entier naturel.

Un ensemble fini E à n éléments possède **2^n parties**, c'est à dire $\text{Card } \mathcal{P}(E) = 2^n$.

Démonstration.

On raisonne par récurrence : pour tout n de $\mathbb{N}$,

$\mathcal{P}(n)$: « Un ensemble à n éléments a 2^n parties ».

• **Initialisation** : pour $n = 0$, $E = \emptyset$ donc $\text{Card } \mathcal{P}(E) = 1$. Or $2^0 = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité** : on suppose que pour un entier naturel k , $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est à dire qu'un ensemble E à k éléments a 2^k parties (hypothèse de récurrence).

Alors, $E' = E \cup \{x\}$, avec $x \notin E$, a $k + 1$ éléments. Il y a deux familles de parties de E' :

— celles qui en contiennent pas x , c'est à dire les parties de l'ensemble E : il y en a 2^k ;

— celles qui contiennent x . Celles-ci sont obtenues en adjoignant x à chaque partie de E : il y en a 2^k également.

Ainsi, le nombre de parties de E' est égal à 2×2^k soit 2^{k+1} .

Donc $\mathcal{P}(k) \implies \mathcal{P}(k + 1)$.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n , la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est à dire un ensemble à n éléments possède 2^n parties.

Lien entre parties d'un ensemble à n éléments, n -uplets de $\{0 ; 1\}, \dots$

$E = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n\}$ est un ensemble à n éléments, avec $n \in \mathbb{N}$.

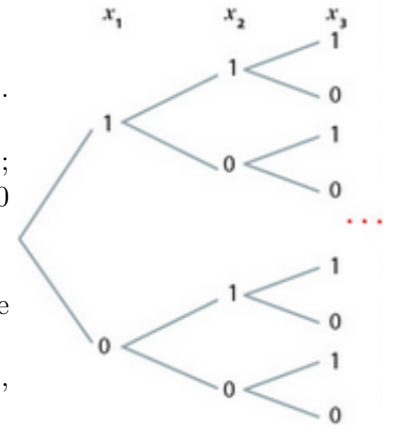
À chaque partie de E correspond un unique n -uplet de $\{0 ; 1\}, \dots$, et inversement.

En effet :

- si x_1 appartient à la partie, on affecte 1 en 1^{ère} position du n -uplet et 0 sinon ;
- si x_2 appartient à la partie, on affecte 1 en 2^{ème} position du n -uplet et 0 sinon ;
- et ainsi de suite jusqu'à x_n et la $n^{\text{ème}}$ position.

Par exemple, le n -uplet $(1 ; 0 ; 1 ; 0 ; \dots ; 0)$ correspond à la partie $\{x_1 ; x_3\}$; le n -uplet $(0 ; 0 ; 0 ; 0 ; \dots ; 0)$ correspond à $\emptyset, \dots$

Ainsi, il y a autant de parties de l'ensemble E que de n -uplets de l'ensemble $\{0 ; 1\}$, c'est à dire 2^n .



III. k -uplets d'éléments distincts. Permutations

n désigne un nombre entier naturel avec $n \geq 1$.

A. Nombre de k -uplets d'éléments distincts d'un ensemble E

Propriété 5.

k désigne un nombre entier naturel tel que $1 \leq k \leq n$.

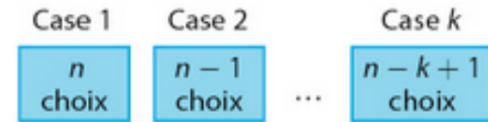
Le nombre de k -uplets d'éléments distincts d'un ensemble E à n éléments est :

$$n \times (n - 1) \times \dots \times (n - k + 1).$$

Démonstration.

Choisir un k -uplet revient à remplir k cases avec des éléments distincts de E .

- Il y a n choix pour la 1^{ère} case.
- Un choix étant fait, il y a $n - 1$ choix possibles pour la 2^{ème} case.
Il y a donc $n(n - 1)$ choix pour remplir les cases 1 et 2.
- Ainsi de suite, les cases $1, 2, \dots, k - 1$ étant complétées,
il reste $n - (k - 1)$ choix possibles pour la case k .
Le nombre de k -uplets est donc $n \times (n - 1) \times \dots \times (n - k + 1)$.



Remarque 1.

Dans l'écriture $n \times (n - 1) \times \dots \times (n - k + 1)$ on écrit k facteurs à partir de n en enlevant 1 à chaque fois.

Exemple 4.

Le nombre de 5-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à 8 éléments est 6720. En effet :

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720.$$

B. Permutations des éléments d'un ensemble E

Définition 4.

E est un ensemble fini à n éléments.

Une **permutation** des éléments de E est un n -uplet d'éléments distincts de E .

Remarque 2.

Lister toutes les permutations de E , c'est écrire les éléments de E dans tous les ordres possibles.

La propriété énoncée au paragraphe **A.**, appliquée avec $k = n$, permet d'énoncer la propriété suivante.

Propriété 6.

Le nombre de permutations d'un ensemble fini à n éléments est :

$$n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

On note ce nombre $n!$ (lire « factorielle n »).

Remarque 3.

Par convention, $0! = 1$.

Exemple 5.

Le nombre de permutations de l'ensemble $\{A ; B ; C\}$ est 6.

En effet, $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.

Conséquence

Le nombre de k -uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments s'écrit aussi

$$\frac{n!}{(n-k)!}.$$

En effet, $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1)) \times (n-k)!}{(n-k)!} = n(n-1) \times \cdots \times (n-k+1).$

IV. Combinaisons**A. Combinaisons de k éléments parmi n** **Définition 5.**

E est un ensemble à n éléments (avec $n \in \mathbb{N}$) et k un nombre entier naturel avec $0 \leq k \leq n$. Une **combinaison** de k éléments de l'ensemble E est une **partie** (ou sous-ensemble) de k éléments de E .

Le nombre de combinaisons de k éléments parmi les n éléments de E est noté $\binom{n}{k}$ (lire « k parmi n »).

Remarque 4.

L'ordre n'intervient pas : $\{a ; b\} = \{b ; a\}$.

Il n'y a pas de répétition : $\{a ; a\} = \{a\}$.

Exemple 6.

$\{2 ; 3\}$ est une combinaison de deux éléments de l'ensemble $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$.

En listant (faites le!) l'ensemble des combinaisons de deux éléments de l'ensemble E ,

on en dénombre $\binom{8}{2} = 28$.

Cas particuliers

- $\binom{n}{n} = 1$ car la seule partie de E à n éléments est E lui-même.
- $\binom{n}{0} = 1$ car l'ensemble vide est la seule partie de E qui n'a pas d'élément.
- $\binom{n}{1} = n$ car il y a n parties de E à un seul élément.

B. Nombre de combinaisons

Propriété 7.

Pour tous entiers naturels n et k ,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{si } 0 \leq k \leq n,$$

$$\text{soit } \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \quad \text{si } 1 \leq k \leq n.$$

Démonstration.

- Si $1 \leq k \leq n$, à une combinaison $F = \{a_1 ; a_2 ; \dots a_k\}$ de k éléments de E , on associe $k!$ permutations de F ; on obtient les k -uplets d'éléments distincts de F .

En faisant de même pour toutes les autres combinaisons de k éléments de E , on obtient tous les k -uplets d'éléments distincts de E .

Ainsi, $\binom{n}{k} \times k! = n(n-1)\dots(n-k+1)$, soit $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$.

D'après la conséquence établie au paragraphe B., $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

- Si $n \geq 1$ et $k = 0$, on a vu ci-dessus que $\binom{n}{0} = 1$.

Or, $\frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$.

- Si $n = k = 0$, $E = \emptyset$ et sa seule partie est $\emptyset$, $\binom{0}{0} = 1$.

Or, $\frac{0!}{0!0!} = 1$.

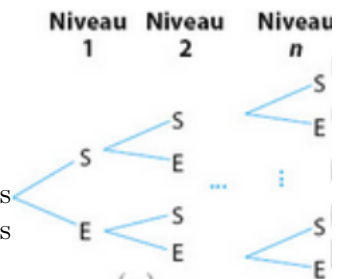
Représentation en termes de chemins dans un arbre

De chaque nœud de cet arbre partent deux branches : S (succès) et E (échec).

Un chemin peut être représenté par une succession de n cases où l'on inscrit S ou E .



Le nombre de chemins avec k succès ($0 \leq k \leq n$) est le nombre de choix de k cases parmi n où l'on inscrit la lettre S . Ces choix sont les combinaisons de k positions parmi n (pas de répétition et pas d'ordre).



Dans un arbre « succès-échec » à n niveaux, le nombre de chemins avec k succès est $\binom{n}{k}$.

V. Propriétés des nombres de combinaisons

A. Symétrie des nombres de combinaisons

Propriété 8.

Pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Démonstration.

Dans un arbre « succès-échec » à n niveaux, il y a autant de chemins qui réalisent k succès que de chemins qui réalisent k échecs, c'est-à-dire qui réalisent $n - k$ succès.

B. La relation de Pascal

Propriété 9.

Pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \leq k \leq n - 1$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Démonstration.

Dans un arbre « succès-échec » à n niveaux, le nombre de chemins réalisant k succès est $\binom{n}{k}$. Parmi ces chemins, on peut distinguer ceux qui commencent par :

- un succès ; il faut donc ensuite $k - 1$ succès en $n - 1$ épreuves. Leur nombre est $\binom{n-1}{k-1}$;
- un échec ; il faut donc ensuite k succès en $n - 1$ épreuves. Leur nombre est $\binom{n-1}{k}$.

Donc $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Remarque 5.

Une autre démonstration, par le calcul, est proposée dans le fiche d'exercices du chapitre.

C. Le triangle de Pascal

On peut calculer les $\binom{n}{k}$ de proche en proche, à l'aide du tableau ci-contre.

Pour cela :

- on convient que $\binom{0}{0} = 1$;
- on place des 1 sur la colonne « $k = 0$ » du fait que $\binom{n}{0} = 1$;
- on place des 1 sur la diagonale du fait que $\binom{n}{n} = 1$;
- on obtient un autre nombre du tableau en additionnant le nombre juste au-dessus et celui situé à gauche sur la ligne précédente d'après la relation de Pascal.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1