

## CHAPITRE 13 - FONCTIONS COSINUS ET SINUS



François VIÈTE est un juriste, un conseiller du roi et un mathématicien français du XVI<sup>ème</sup> siècle, sans doute le premier grand mathématicien français de l'histoire.

Dès 1589, il répond à l'appel d'Henri III, réfugié à Blois, et devient à nouveau conseiller royal au Parlement de Tours. Après la mort d'Henri III, la même année, Viète entre au conseil privé d'Henri IV. Il est chargé du déchiffrement des codes secrets ennemis. Ses succès seront précieux dans la guerre opposant les troupes d'Henri IV à celles de Philippe II d'Espagne, qui, persuadé que ses messages ne pouvaient être déchiffrés, se plaignit au pape que les français utilisaient la magie noire. Viète quitte le service du roi en 1602, et décède un an plus tard.

Bien que n'étant pas un mathématicien à plein temps, les apports de Viète aux mathématiques sont importants. Le premier concerne la formalisation des calculs algébriques. Dans *In artem analyticam isagoge*, publié en 1593, il est le premier à utiliser des lettres pour désigner à la fois les quantités inconnues (notées par des voyelles  $A, E, I, \dots$ ) et les quantités connues (notées par les consonnes  $B, C, D \dots$ ). Surtout, il systématise l'utilisation de l'algèbre pour la résolution de problèmes de géométrie. L'écriture symbolique des équations comme nous la pratiquons est en marche, et c'est DESCARTES qui, peu de temps après, propose d'utiliser les lettres de la fin de l'alphabet ( $x, y \dots$ ) pour désigner les inconnues. Viète s'intéresse aussi :

- aux équations algébriques, à leur résolution, aux liens entre coefficients et racines ;
- aux fonctions trigonométriques, il exprime notamment  $\cos(nx)$  et  $\sin(nx)$  comme un polynôme en  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$  ;
- aux problèmes grecs classiques (quadrature du cercle, trisection de l'angle) pour lesquels il réfute, à juste titre, des contributions récentes et au contraire propose des méthodes de résolution astucieuses avec des règles à deux points...
- à la cryptographie, son mémoire sur le sujet publié quelques mois avant sa mort rendant caduque les méthodes utilisées à l'époque ;
- à l'astronomie.

Terminons par une petite anecdote dont on ne connaît pas exactement la part de vérité. En 1593, un mathématicien flamand, ROMANUS, proposa un défi à tous les mathématiciens d'Europe. Il s'agissait de résoudre une équation de degré 45. L'ambassadeur de Hollande à Paris défia alors le roi Henri IV, prétendant qu'il n'y avait pas de mathématiciens en France capable de résoudre ce problème. Henri IV alla chercher Viète, qui reconnut rapidement comme solution la longueur d'une corde d'un arc de  $8^\circ$ . Utilisant ensuite la trigonométrie, Viète déduisit alors toutes les solutions. Romanus est très impressionné et il deviendra un bon ami de Viète.

# I. Fonctions cosinus et sinus

## A. Enroulement et définitions

Considérons le repère du plan  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ , le cercle trigonométrique  $\mathcal{C}$ , A le point de coordonnées  $(1;0)$  et  $d$  la droite orientée munie du repère  $(A; \vec{j})$ .

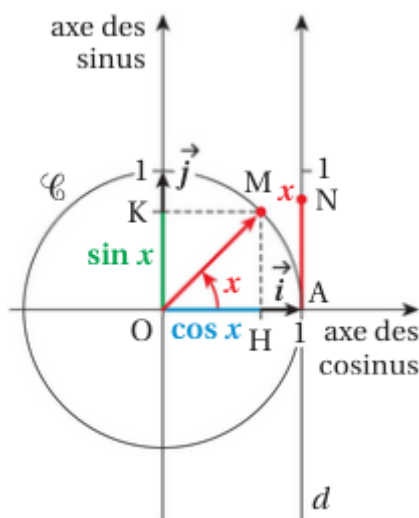
Soit  $x$  un nombre réel quelconque et N le point de  $d$  tel que  $\overrightarrow{AN} = x\vec{j}$ .

La droite  $d$  est « enroulée » sur le cercle trigonométrique ; au point N de  $d$  correspond un point M de  $\mathcal{C}$ . Le nombre  $x$  est donc une mesure en radians de l'angle orienté  $(\vec{i} ; \overrightarrow{OM})$ .

Le cosinus de cet angle est l'abscisse du point M.

Le sinus de cet angle est l'ordonnée du point M.

Ainsi, les deux nombres  $\cos x$  et  $\sin x$  sont donnés par les points H et K, projetés orthogonaux de M respectivement sur les deux axes  $(O ; \vec{i})$  et  $(O ; \vec{j})$ .

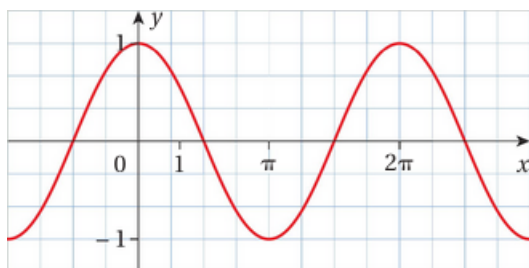


### Définition 1.

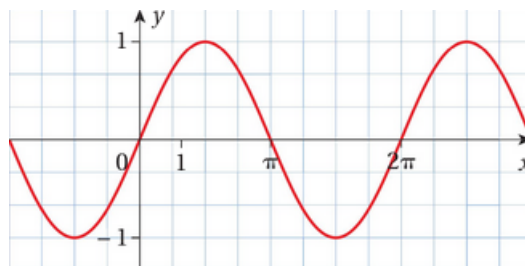
- La fonction qui à tout nombre réel  $x$  fait correspondre l'abscisse du point M est la fonction cosinus.
- La fonction qui à tout nombre réel  $x$  fait correspondre l'ordonnée du point M est la fonction sinus.

## B. Représentations graphiques

- Représentation graphique de la fonction **cosinus**



- Représentation graphique de la fonction **sinus**



### Remarque 1.

Pour tout réel  $x$  on a

- $-1 \leq \cos x \leq 1$
- $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

### Notation :

$\sin^2 x$  est une notation pour  $(\sin x)^2$ .

## II. Propriétés des fonctions cosinus et sinus

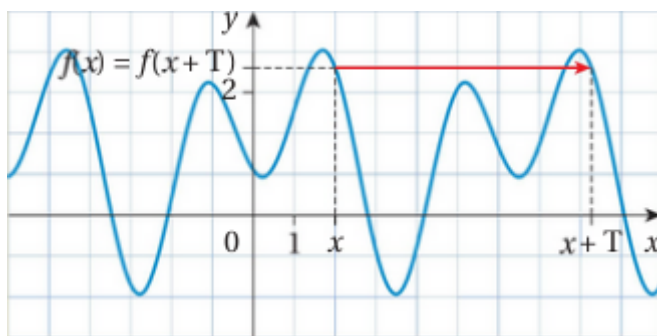
### A. Périodicité

#### Définition 2.

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

La fonction  $f$  est périodique de période  $T$  s'il existe un nombre réel strictement positif  $T$  tel que, pour tout nombre réel  $x$  de  $I$ , on a :

$$f(x + T) = f(x)$$



#### Remarque 2.

- Dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , la courbe représentative d'une fonction périodique de période  $T$  est invariante par translation de vecteur  $T\vec{i}$ .
- Si  $T$  est une période de  $f$  et  $n$  un entier naturel non nul,  $nT$  est également une période de  $f$ .

#### Propriété 1.

Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période  $2\pi$ .

#### Démonstration.

Comme le périmètre du cercle trigonométrique est  $2\pi$ , un point  $N$  de  $d$  tel que  $\overrightarrow{AN} = x\vec{j}$  se trouve après « enroulement » sur  $C$  au même point que le point  $N_1$  de  $d$  tel que  $\overrightarrow{AN_1} = (x + 2\pi)\vec{j}$ .

### B. Parité

#### Définition 3.

Soit  $f$  une fonction définie sur un ensemble  $\mathcal{D}$ .

- La fonction  $f$  est **paire** si pour tout nombre réel  $x$  de  $\mathcal{D}$

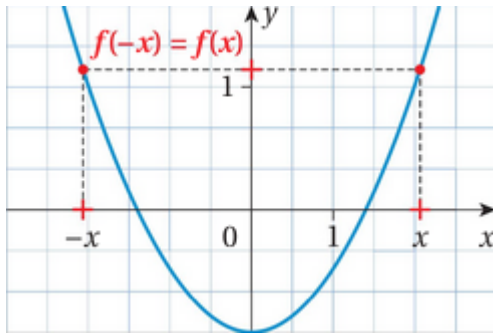
le nombre  $-x$  appartient à  $\mathcal{D}$  et  $f(-x) = f(x)$ .

- La fonction  $f$  est **impaire** si pour tout nombre réel  $x$  de  $\mathcal{D}$

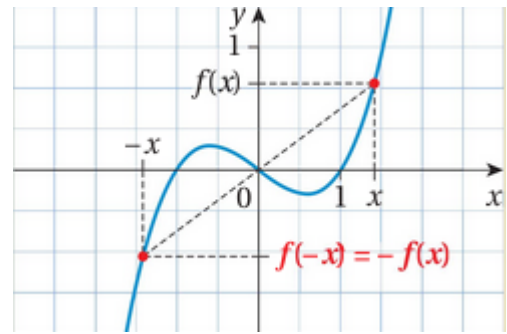
le nombre  $-x$  appartient à  $\mathcal{D}$  et  $f(-x) = -f(x)$ .

### Interprétation graphique

• Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



• Dans un repère, la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.



### Propriété 2.

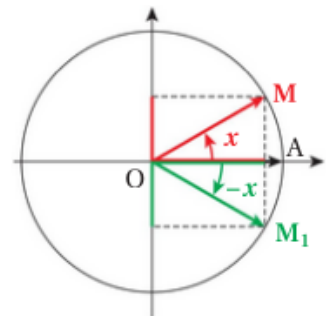
- La fonction cosinus est une fonction paire : pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\cos(-x) = \cos x$ .
- La fonction sinus est une fonction impaire : pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sin(-x) = -\sin x$ .

### Démonstration.

L'ensemble de définition des fonctions cosinus et sinus est  $\mathbb{R}$  donc pour tout nombre réel  $x$  de  $\mathbb{R}$ , le nombre  $-x$  appartient également à  $\mathbb{R}$ .

Les points M et M<sub>1</sub> correspondant respectivement à  $x$  et  $-x$  sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, donc :

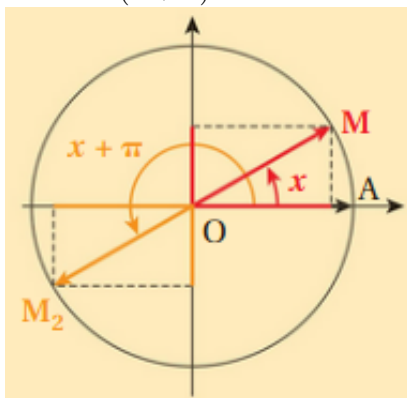
$$\cos(-x) = \cos x \text{ et } \sin(-x) = -\sin x.$$



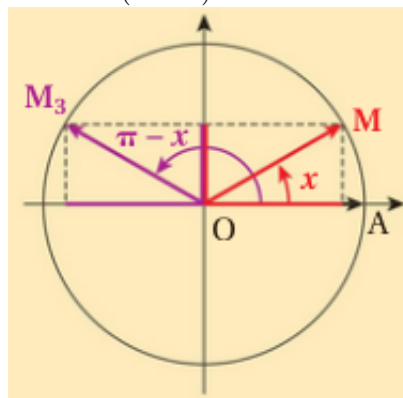
### Propriété 3 (Angles associés).

Pour tout nombre réel  $x$ , on a

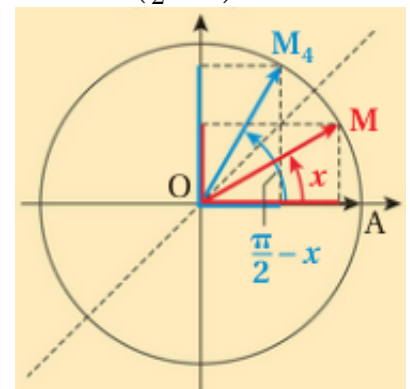
$$\begin{aligned} &\bullet \sin(x + \pi) = -\sin x \\ &\text{et} \\ &\cos(x + \pi) = -\cos x \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &\bullet \sin(\pi - x) = \sin x \\ &\text{et} \\ &\cos(\pi - x) = -\cos x \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &\bullet \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \\ &\text{et} \\ &\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \end{aligned}$$



### Démonstration.

Dans chaque cas, les égalités se démontrent à partir des propriétés géométriques des triangles OMM<sub>i</sub> (où  $i \in \{2, 3, 4\}$ ).

### III. Dérivées des fonctions cosinus et sinus

#### A. Nombres dérivés en 0 des fonctions cosinus et sinus

##### Propriété 4.

- La fonction cosinus est dérivable en 0 et son nombre dérivé en 0 vaut 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0.$$

- La fonction sinus est dérivable en 0 et son nombre dérivé en 0 vaut 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

##### Démonstration.

- Pour la fonction sinus.

Montrons tout d'abord que la fonction sinus est continue en  $x = 0$ .

Soit  $x$  tel que  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ . Nous admettrons que :

$$\text{pour } 0 < x < \frac{\pi}{2} : \sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x} \quad (1)$$

Comme  $\sin x \geq 0$ , on en déduit que  $0 \leq \sin x \leq x$ .

Grâce aux théorèmes de comparaison sur les limites, on obtient  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sin x = 0$ .

La fonction sinus est impaire, on a donc également  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \sin x = 0$ .

De plus  $\sin 0 = 0$ .

On en déduit que la fonction sinus est continue en  $x = 0$ .

Montrons maintenant que la fonction sinus est dérivable en  $x = 0$ , de nombre dérivé 1.

Étudions la limite lorsque  $h$  tend vers 0 de  $\frac{\sin h - \sin 0}{h} = \frac{\sin h}{h}$ .

D'après (1), pour  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  on a :

$$0 < \sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow 0 < \frac{\cos x}{\sin x} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sin x} \Leftrightarrow 0 < \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

Pour tout  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$  on a  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ . Par les théorèmes de comparaison sur les limites, on obtient

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

La fonction sinus est impaire, on a donc également  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

La fonction sinus est donc dérivable en  $x = 0$ , de nombre dérivé 1.

- Pour la fonction cosinus, la démonstration est laissée en exercice. Que nous traiterons d'ailleurs certainement ensemble.

## B. Dérivabilité des fonctions cosinus et sinus

### Théorème 1.

- La fonction cosinus est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée est la fonction  $x \mapsto -\sin x$ .
- La fonction sinus est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée est la fonction  $x \mapsto \cos x$ .

### Démonstration.

Soit  $x$  un nombre réel quelconque et  $h \neq 0$ .

- Montrons que la fonction cosinus est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que sa dérivée est la fonction  $x \mapsto -\sin x$ .  

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} = \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h}.$$

Or,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$  et  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$  (dérivabilité des fonctions cosinus et sinus en 0).

Donc  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\sin x$ .

Ce qui prouve que la fonction cosinus est dérivable en tout nombre réel  $x$  et que sa dérivée est la fonction  $x \mapsto -\sin x$ .

- Montrons que la fonction sinus est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que sa dérivée est la fonction  $x \mapsto \cos x$ .  

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}.$$

Or,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$  et  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$  (dérivabilité des fonctions cosinus et sinus en 0).

Donc  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$ .

Ce qui prouve que la fonction sinus est dérivable en tout nombre réel  $x$  et que sa dérivée est la fonction  $x \mapsto \cos x$ .

On pourra retenir que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \cos' = -\sin \quad \text{et} \quad \sin' = \cos$$

### Remarque 3.

L'étude des signes des dérivées des fonctions cosinus et sinus permet de dresser sur  $[0 ; \pi]$  les tableaux de variations de ces deux fonctions dont les courbes représentatives se trouvent en I. B.

| $x$                   | 0 | $\pi$ |
|-----------------------|---|-------|
| $f'(x) = -\sin x$     | 0 | 0     |
| $f: x \mapsto \cos x$ | 1 | -1    |

| $x$                   | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|-----------------------|---|-----------------|-------|
| $f'(x) = \cos x$      | 1 | 0               | -1    |
| $f: x \mapsto \sin x$ | 0 | 1               | 0     |

### Propriété 5.

Pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

- La dérivée de la fonction  $x \mapsto \cos(ax+b)$  est définie par  $x \mapsto -a \sin(ax+b)$ .
- La dérivée de la fonction  $x \mapsto \sin(ax+b)$  est définie par  $x \mapsto a \cos(ax+b)$ .

### Démonstration.

Ces propriétés découlent immédiatement du fait que  $x \mapsto f(ax+b)$  se dérive en  $x \mapsto a f'(ax+b)$ , quelque soit la fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ .