

CHAPITRE 15 - CALCUL INTÉGRAL



GOTTFRIED LEIBNIZ est plus qu'un grand scientifique. Tour à tour philosophe, juriste, historien, diplomate, c'est un grand homme universel de son temps, pacifiste, rêvant de réunifier les églises catholiques et protestantes, et de rapprocher les peuples d'Europe.

Né le 1er juillet 1646 à Leipzig, il y étudie de façon en partie autodidacte. Il étudie ensuite la philosophie, les mathématiques et le droit à l'université de Leipzig, puis à celle d'Altdorf. Après avoir obtenu le titre de docteur, il rentre au service du baron VON BOYNEBURG, à Francfort, qui l'initie à la politique.

C'est à Paris que Leibniz met au point sa découverte mathématique fondamentale, l'invention du calcul différentiel et intégral. Leibniz montre notamment que l'intégration et la dérivation sont des opérations inverses l'une de l'autre, invente la notation $\int f(x)dx$, trouve les formules de dérivation d'un produit, d'un quotient, d'une puissance.

Signalons qu'une violente querelle opposa NEWTON et Leibniz. Newton était parvenu, quelques années auparavant, aux mêmes conclusions que Leibniz, et accusera son homologue allemand de plagiat. Il semble pourtant bien que les deux mathématiciens aient fait leurs recherches indépendamment l'un de l'autre, et l'Histoire a retenu les deux noms comme inventeurs du calcul infinitésimal. Ce sont plutôt les notations symboliques de Leibniz qui se sont imposées.

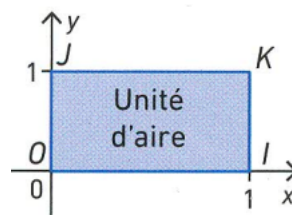
I. Intégration

A. Aire sous la courbe d'une fonction positive

A..1 Notion d'intégrale

Définition 1.

Soit un repère orthogonal (O, I, J), soit K le point de coordonnées (1; 1).
L'aire du rectangle IOJK est appelée **unité d'aire** et est notée u.a.



Exemple 1.

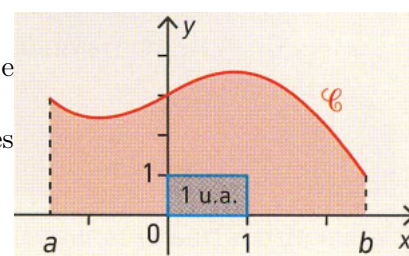
Si $OI = 3$ cm et $IJ = 2$ cm, alors $1 \text{ u.a.} = 6 \text{ cm}^2$.

Définition 2.

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

L'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, exprimée en unités d'aire, est appelée

intégrale de a à b de la fonction f . Elle est notée $\int_a^b f(x)dx$.



Remarque 1.

Le nombre $\int_a^b f(x)dx$ ne dépend que de a, b et f . On dit que x est une variable muette.

On peut également écrire ce nombre $\int_a^b f(t)dt$, $\int_a^b f(u)du$ ou $\int_a^b f(\zeta)d\zeta \dots$

A..2 Propriétés des intégrales

Propriété 1 (positivité).

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.

- On a $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Si $a = b$, alors $\int_a^b f(x)dx = 0$.

Démonstration.

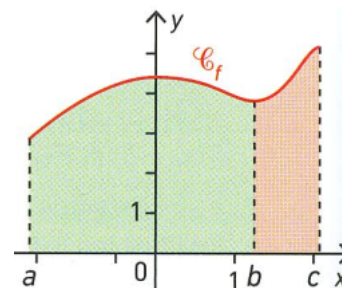
$\int_a^b f(x)dx$ étant une aire, c'est un nombre positif.

Si $a = b$, le domaine considéré est réduit à un segment.

Propriété 2 (relation de Chasles).

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; c]$ et soit $b \in [a; c]$.

On a $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.



Propriété 3 (invariance par symétrie et translation).

Soient f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$, $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal et T un réel.

Si $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, c'est à dire si f est **paire**,

$$\text{alors } \int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx.$$

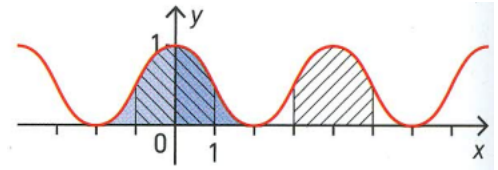
Si $\mathcal{C}$ est invariante par translation de vecteur $T\vec{i}$, c'est à dire si f est **T -périodique**,

$$\text{alors } \int_a^b f(x)dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx.$$

Exemple 2.

Avec la fonction représentée ci-contre, on a :

- $\int_{-2}^0 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx$ pour les aires bleues.
- $\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_3^5 f(x)dx$ pour les aires hachurées.



B. Primitive d'une fonction

B.1 Théorème fondamental

Théorème 1.

Soient f une fonction positive et croissante sur un intervalle $[a; b]$ et F la fonction définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. La fonction F est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée f .

Démonstration (exigible).

Soit $x_0 \in [a; b]$ et soit h un réel non nul tel que $x_0 + h \in [a; b]$.

1^{er} cas : $h > 0$

$$\begin{aligned} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \right) \end{aligned}$$

Comme f est croissante sur $[a; b]$, l'aire sous la courbe de f entre x_0 et $x_0 + h$ est comprise entre l'aire des rectangles de largeur h et de hauteurs respectives $f(x_0)$ et $f(x_0 + h)$.

$$\text{Donc } hf(x_0) \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \leq hf(x_0 + h),$$

$$\text{soit } f(x_0) \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h), \text{ car } h > 0.$$

2^{ème} cas : $h < 0$

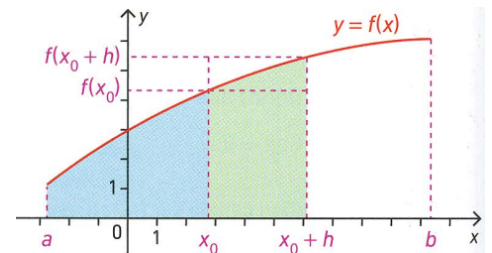
$$\text{On montre de la même façon que } f(x_0 + h) \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0).$$

Comme f est continue sur $[a; b]$, $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$.

Donc, dans les deux cas, on a $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$ d'après le théorème des gendarmes.

Donc, F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

Donc la fonction F est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée f .



B..2 Primitive d'une fonction - rappels

Définition 3.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

F est une **primitive de f sur I** si F est dérivable sur I et si $F' = f$.

Exemple 3.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x - 3$.

La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 2x^2 - 3x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Théorème 2.

Si f est une fonction continue sur un intervalle I , alors f admet des primitives sur I .

Démonstration. (dans le cas où $I = [a; b]$ et f admet un minimum sur I)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ et soit m le minimum de f (on admet l'existence de ce minimum). Soit g la fonction définie sur $[a; b]$ par $g(x) = f(x) - m$.

Pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \geq m$, donc $g(x) \geq 0$.

Donc g est une fonction continue et positive. Elle admet donc comme primitive sur $[a; b]$ la fonction G définie

par $G(x) = \int_a^x g(t)dt$. Soit F la fonction définie sur $[a; b]$ par $F(x) = G(x) + mx$.

F est dérivable sur $[a; b]$ et $F'(x) = G'(x) + m = g(x) + m = f(x)$.

Donc F est bien une primitive de f sur $[a; b]$.

Théorème 3.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit F une primitive de f sur I .

- Les primitives de f sur I sont les fonctions G définies sur I par $G(x) = F(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- Quels que soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

C. Calcul d'aire à l'aide d'une intégrale

C..1 Intégrale et primitive

Propriété 4.

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. Soit F une primitive de f sur $[a; b]$.

On a $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Démonstration (exigible).

Si f est une fonction positive, alors la fonction G définie sur $[a; b]$ par $\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur $[a; b]$. Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in [a; b]$, $G(x) = F(x) + k$.

De plus, $G(a) = 0$, donc $0 = F(a) + k$, donc $k = -F(a)$.

Donc $G(x) = F(x) - F(a)$, donc $\int_a^b f(x)dx = G(b) = F(b) - F(a)$.

Remarque 2.

- Cette propriété permet de calculer l'aire sous la courbe d'une fonction f continue et positive grâce à une primitive de f .
- $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive choisie pour f : si G est une autre primitive de f , alors $G = F + k$, donc $G(b) - G(a) = F(b) + k - F(a) - k = F(b) - F(a)$.
- Le nombre $F(b) - F(a)$ peut être noté $[F(x)]_a^b$.

Exemple 4.

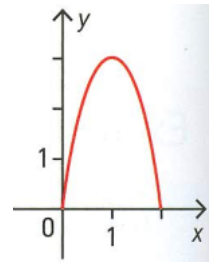
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 6x$.

On note A l'aire sous la courbe de f sur l'intervalle $[0; 2]$.

La fonction f est continue sur $[0; 2]$ et $f(x) = 3x(-x + 2)$, donc f est positive sur $[0; 2]$.

La fonction F définie sur $[0; 2]$ par $F(x) = -x^3 + 3x^2$ est une primitive de f sur $[0; 2]$.

On a donc $A = \int_0^2 (-3x^2 + 6x) dx = F(2) - F(0) = 4$ u.a.



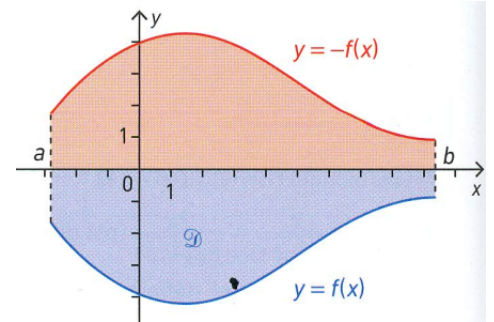
C..2 Intégrale et aire

Propriété 5.

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a; b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

L'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, exprimée en unités d'aire,

est égale à $\int_a^b -f(x) dx$



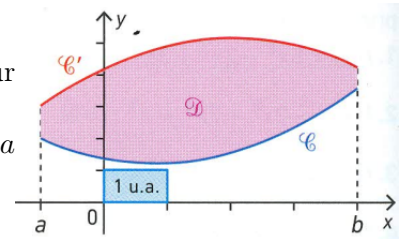
Démonstration.

Par symétrie, cette aire est égale à l'aire sous la courbe de la fonction $-f$ sur $[a; b]$.

Propriété 6 (admise).

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ telles que $f \leq g$ sur $[a; b]$. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal.

L'aire du domaine délimité par les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, exprimée en unités d'aire, est égale à $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx$.



D. Intégrale d'une fonction continue

D..1 Définition et propriétés

Définition 4.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a et b appartenant à I .

Soit F une primitive de f sur I .

On définit l'intégrale de a à b de f par $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Remarque 3.

Cette définition est cohérente avec celle du paragraphe I. A.. 1. dans le cas où f est une fonction positive et avec $a \leq b$. Elle généralise la définition d'une intégrale au cas d'une fonction continue de signe quelconque et d'ordre a et b quelconque.

Propriété 7 (propriétés algébriques).

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Soient a, b et c appartenant à I et soit λ un réel.

- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.
- Relation de Chasles : $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$.
- Linéarité : $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ et $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$

Propriété 8 (intégrales et inégalités).

Soient deux réels a et b tels que $a \leq b$ et soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a; b]$.

- Positivité : Si $f \geq 0$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Ordre : Si $f \leq g$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Démonstration.

- Soit F une primitive de f sur $[a; b]$.
Si $f \geq 0$, alors F est croissante, donc $F(b) \geq F(a)$ et donc $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Si $f \leq g$, alors $g - f \geq 0$, donc $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq 0$, et donc $\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$.

D..2 Valeur moyenne d'une fonction

Définition 5.

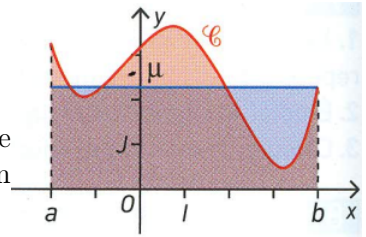
Soient deux réels a et b tels que $a < b$ et soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$.

On appelle **valeur moyenne** de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$ le nombre réel $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$.

Interprétation

Si f est une fonction positive, on a $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$.

L'aire sous la courbe de la fonction f (en rouge) est donc égale à l'aire du rectangle de largeur $b-a$ et de hauteur μ (en bleu), c'est à dire à l'aire sous la courbe de la fonction constante de valeur μ .



E. Intégration par parties

Théorème 4.

Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a; b]$ qui admettent des dérivées u' et v' continues. Alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

Démonstration.

La dérivée du produit uv est donnée par : $(uv)' = u'v + uv'$.

Alors uv est une primitive de $u'v + uv'$ sur $[a; b]$. Donc :

$$\begin{aligned} [u(x)v(x)]_a^b &= \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) dx \\ &= \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx, \quad \text{d'où la formule} \end{aligned}$$

Remarque 4.

L'intérêt est de se ramener à une intégrale $\int_a^b u'(t)v(t) dt$ plus facilement calculable que $\int_a^b u(t)v'(t) dt$.

Nous verrons divers exemples en exercice.