

CHAPITRE 16 - CONCENTRATION, LOI DES GRANDS NOMBRES

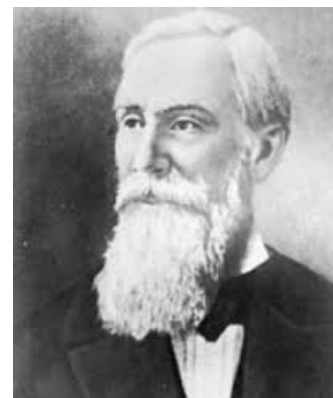
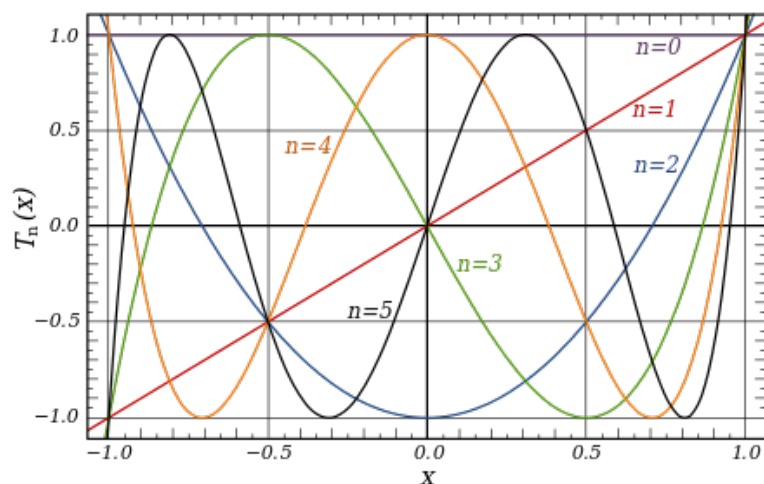
Pafnouti TCHEBYCHEV, né le 16 mai 1821 à Okatovo, dans l'ouest de la Russie, est un mathématicien russe du XIX^{ème} siècle. Issu d'une famille de militaires, riche et cultivée, il est d'abord éduqué chez ses parents. Il reçoit alors de très bons enseignements en mathématiques, mais aussi en français ce qui lui permettra plus tard d'échanger facilement avec les mathématiciens occidentaux. Son enfance est marquée par un handicap (il a une jambe plus longue que l'autre) qui l'empêche de pratiquer certaines activités, et aussi d'envisager une carrière militaire.

En 1837, il entre à l'université de Moscou, où il apprend les mathématiques sous la direction de BRASHMAN. Alors qu'il commence à obtenir ses premiers résultats, sa situation financière change dramatiquement en 1841 quand une famine frappe durement la Russie. Ses parents doivent quitter Moscou et ne peuvent plus subvenir à ses besoins. Même s'il vit désormais misérablement, Tchebychev persiste à continuer ses études. Il soutient sa thèse en 1846, où il poursuit le programme de BERNOULLI et de POISSON consistant à donner un cadre théorique aux théorèmes limites des probabilités.

En 1847, il devient professeur à Saint-Petersbourg.

Outre ses travaux en théorie des probabilités, Tchebychev est aussi célèbre pour les avancées qu'il a réalisées en arithmétique. Ainsi, en 1850, il démontre le postulat de BERTRAND, à savoir qu'il existe toujours un nombre premier compris entre n et $2n$, dès que $n > 2$. Il étudie également le nombre $\pi(n)$ de nombre premiers inférieurs à n . Confortant une conjecture de GAUSS, il obtient que si $\frac{(\pi(n) \log(n))}{n}$ admet une limite quand n tend vers l'infini, alors cette limite est nécessairement 1.

Aimant combiner les aspects théoriques et appliquées des mathématiques, très habile de ses mains, il a conçu plusieurs machines arithmétiques ou autres structures mécaniques. C'est dans un article consacré à la mécanique qu'il a introduit les polynômes dits de Tchebychev. À la suite de cela, il est le premier à ébaucher une théorie des polynômes orthogonaux.



I. Inégalités de concentration

A. Inégalité de Markov

Propriété 1.

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives d'espérance $E(X)$, et soit a un nombre réel strictement positif. On a :

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Remarque 1.

- Ce résultat signifie que la probabilité que X prenne des valeurs plus grandes que a est d'autant plus petite que a est grand.
- Si $a \leq E(X)$, l'inégalité de Markov est triviale.

En effet, la borne $\frac{E(X)}{a}$ est alors supérieure à 1.

Exemple 1.

Soit X une variable aléatoire positive d'espérance 5.

D'après l'inégalité de Markov, on a $P(X \geq 100) \leq 0,05$.

Autrement dit, une v.a. positive dont l'espérance vaut 5 a au plus 5 chances sur 100 de dépasser 100.

B. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Propriété 2.

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X) = \mu$ et de variance $V = \sigma^2$.

Pour tout réel $\delta > 0$ on a :

$$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}.$$

Que l'on peut réécrire :

$$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^2.$$

Remarque 2.

- Ce résultat signifie que la probabilité que les valeurs prises par X s'écartent d'au moins δ de l'espérance μ est d'autant plus petite que δ est grand.
- On verra une démonstration de ce résultat en exercice.
- Pour $\delta \leq \sigma$ on a $\frac{V(X)}{\delta^2} \geq 1$, et l'inégalité est triviale.
- On a les égalités suivantes entre événements complémentaires :
 $(|X - \mu| < \delta) = (\mu - \delta < X < \mu + \delta)$ et $(|X - \mu| \geq \delta) = (X \leq \mu - \delta) \cup (X \geq \mu + \delta)$.
De sorte que $1 - P(|X - \mu| \geq \delta) = P(|X - \mu| < \delta) = P(\mu - \delta < X < \mu + \delta)$.
On dit que $[\mu - \delta ; \mu + \delta]$ est un **intervalle de fluctuation** de X .

Exemple 2.

- On lance une pièce équilibrée 100 fois de suite, la variable aléatoire X donne le nombre de Pile obtenus.
 X suit la loi binomiale de paramètre $n = 100$ et $p = \frac{1}{2}$.
L'espérance de X est $\mu = 100 \times \frac{1}{2} = 50$ et sa variance est $V(X) = \sigma^2 = 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 25$.
D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout réel $\delta > 0$,

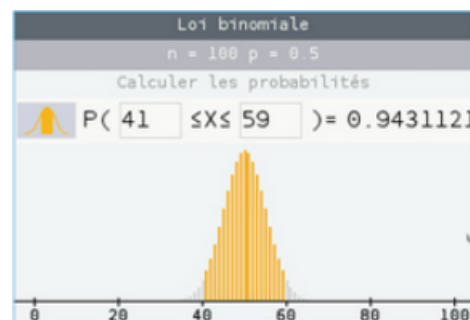
$$P(|X - 50| \geq \delta) \leq \frac{25}{\delta^2}.$$

Par exemple, pour $\delta = 10$, $P(|X - 50| \geq 10) \leq 0,25$.

La probabilité que l'écart de X à $\mu = 50$ soit supérieur ou égal à 10 est inférieure à 0,25.

Or, $P(|X - 50| < 10) = 1 - P(|X - 50| \geq 10)$,
donc $P(|X - 50| < 10) \geq 0,75$.

La probabilité que X prenne une valeur dans l'intervalle $]40 ; 60[$ est supérieure à 0,75.



- Soit X une variable aléatoire d'écart type σ et d'espérance μ .
Si $\delta = 3\sigma$, alors :

$$P(|X - \mu| \geq 3\sigma) \leq \left(\frac{\sigma}{3\sigma}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

Autrement dit, la probabilité qu'une variable aléatoire prenne des valeurs éloignées de son espérance d'au moins le triple de son écart-type est inférieure à $\frac{1}{9} \approx 0,112$.

C. Des situations particulières

L'objectif de cette sous-section est de généraliser le résultat mis en évidence dans le dernier exemple.

X est une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ .

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = k\sigma$ où k est un nombre entier naturel, $k \geq 2$:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2}, \text{ soit } P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.$$

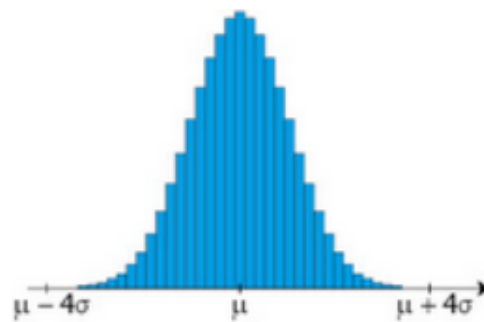
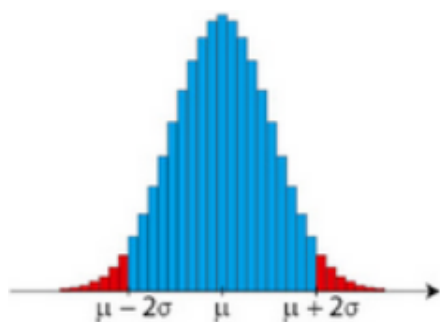
Par exemple :

- $k = 2$, $P(|X - \mu| \geq 2\sigma) \leq 0,25$

La probabilité que l'écart de X à μ soit supérieur ou égal à 2σ est inférieure ou égale à 0,25.

- $k = 4$, $P(|X - \mu| \geq 4\sigma) \leq 0,0625$

Obtenir un écart de X à μ supérieur ou égal à 4σ est un événement improbable.



II. Loi des grands nombres

Propriété 3 (Loi des grands nombres).

On donne n variables aléatoires (avec $n \geq 2$) $X_1, X_2, \dots, X_n$ indépendantes, identiques, suivant une même loi de probabilité d'espérance μ et de variance $V = \sigma^2$.

On note $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ la variable aléatoire moyenne.

Pour tout réel $\delta > 0$,

$$P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}.$$

(Inégalité de concentration)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - \mu| \geq t) = 0.$$

(Loi des grands nombres)

Démonstration.

- L'espérance de M_n est $E(M_n) = \frac{1}{n} \times n\mu = \mu$ et sa variance est $V(M_n) = \frac{1}{n^2} \times nV = \frac{V}{n}$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout réel $\delta > 0$,

$$P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V(M_n)}{\delta^2}, \text{ soit } P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}.$$

- Pour tout réel $t > 0$ donné, l'inégalité de concentration précédente permet d'écrire :

$$0 \leq P(|M_n - \mu| \geq t) \leq \frac{V}{nt^2}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V}{nt^2} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - \mu| \geq t) = 0$.

Exemple 3 (Cas particulier important de la loi binomiale).

- On considère un schéma de Bernoulli comportant n répétitions d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p .

On note X_i ($1 \leq i \leq n$) la v.a associée à la i -ème épreuve de Bernoulli qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 sinon. On a alors $P(X_i = 1) = p$.

— Chaque v.a X_i suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p .

— La v.a $S_n = X_1 + \dots + X_n$ est égale au nombre de succès lors des n épreuves et suit donc la **loi binomiale** de paramètres n et p .

— On note $M_n = \frac{S_n}{n}$ la **fréquence empirique**.

— Soit t un réel strictement positif.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à S_n et M_n donne :

$$P(|S_n - np| \geq t) \leq \frac{np(1-p)}{t^2} \quad \text{et} \quad P(|M_n - p| \geq t) \leq \frac{p(1-p)}{nt^2}.$$

(La loi des grands nombres, avec $\mu = p$ et $V = p(1-p)$ (X suit une loi de Bernoulli)).

- Dans une société de démarchage, par téléphone, on estime que 40% des personnes appelées répondent effectivement. On appelle n personnes, la variable aléatoire X_k donne 1 si la k -ième personne appelée répond et 0 sinon. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes, identiques, de même loi d'espérance $\mu = p = 0,4$ et de variance $V = p(1-p) = 0,24$.

Alors, pour tout réel $\delta > 0$, $P(|M_n - 0,4| \geq \delta) \leq \frac{0,24}{n\delta^2}$.

Par exemple, pour $\delta = 0,1$, $P(|M_n - 0,4| \geq 0,1) \leq \frac{24}{n}$.

Pour $n = 1000$, $P(|M_n - 0,4| \geq 0,1) \leq 0,024$.

On dit que l'on obtient pour M_n **une précision** de 0,1 avec **un risque** de 0,024.

Lorsqu'on appelle 1000 personnes, la probabilité que le nombre de personnes qui répondent soit en dehors de l'intervalle]300 ; 500[est inférieure à 0,024.