

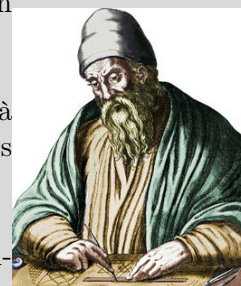
CHAPITRE 2 - VECTEURS, DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

EUCLIDE (vers 300 av. J.-C.), dit parfois Euclide d'Alexandrie, est un mathématicien de la Grèce antique.

Son ouvrage le plus célèbre, les *Éléments*, texte fondateur des mathématiques en Occident, est un des plus anciens traités connus présentant de manière systématique, à partir d'axiomes et de postulats, un large ensemble de théorèmes accompagnés de leurs démonstrations.

Il porte sur la géométrie, tant plane que solide, et l'arithmétique théorique.

Du nom d'Euclide, dérivent en particulier l'algorithme d'Euclide, la géométrie euclidienne (et non euclidienne), la division euclidienne.



I. Vecteurs de l'espace

A. Définition d'un vecteur de l'espace

Propriété 1.

On étend à l'espace la notion de vecteur du plan. Soient A et B deux points de l'espace.

Au couple (A ; B), on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de la **translation** qui transforme A en B.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati).

On peut alors noter $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des **représentants** du vecteur $\vec{u}$.

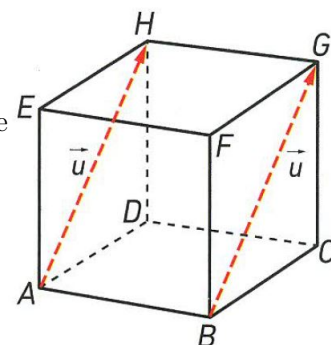
Remarque 1.

Lorsque les points A et B sont confondus, on dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est nul, et on note $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Exemple 1.

Dans le cube ci-contre, la translation qui transforme A en H, transforme B en G.

On a alors $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG} = \vec{u}$.



B. Opération sur les vecteurs de l'espace

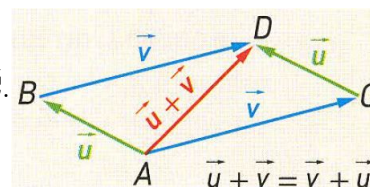
Théorème 1.

Soit $\vec{u}$ un vecteur et A un point de l'espace. Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

Propriété 2 (Règle du parallélogramme).

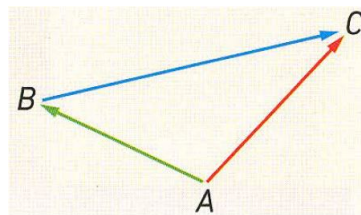
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace de représentants respectifs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

- La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} + \vec{v}$ de représentant $\overrightarrow{AD}$.
- $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow$ ABDC est un parallélogramme.



Propriété 3 (Relation de Chasles).

Pour tous points A, B et C de l'espace, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Remarque 2.

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
 $\overrightarrow{BA}$ est le vecteur opposé de $\overrightarrow{AB}$. On note $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.
Et on note $-\vec{u}$ le vecteur opposé de $\vec{u}$.
- Toutes les opérations sur les vecteurs du plan se prolongent aux vecteurs de l'espace.

Propriété 4.

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ un vecteur de l'espace. Soit k un nombre réel.

Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur défini par un représentant $\overrightarrow{AC}$ tel que :

- C appartient à la demi-droite d'origine A contenant B et $AC = kAB$ lorsque $k > 0$.
- C appartient à la demi-droite d'origine A et ne contenant pas B et $AC = -kAB$ lorsque $k < 0$.



Remarque 3.

Comme dans le plan, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont dits colinéaires.

Les propriétés des vecteurs colinéaires du plan se prolongent aux vecteurs de l'espace.

Propriété 5.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Soient k et k' deux réels.

- $k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$;
- $k(k'\vec{u}) = kk'\vec{u}$;
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$;
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.

II. Caractérisation vectorielle des droites et des plans

A. Caractérisation vectorielle d'une droite

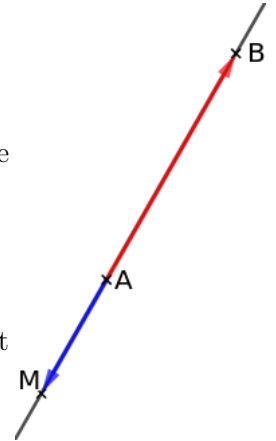
Propriété 6.

Soient A et B deux points distincts de l'espace.

Un point M appartient à la droite (AB) si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

Remarque 4.

- Comme dans le plan, $\overrightarrow{AB}$ s'appelle un vecteur directeur de la droite (AB).
- Un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$ déterminent la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.



Propriété 7.

Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathcal{D}'$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}'$.
 $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.

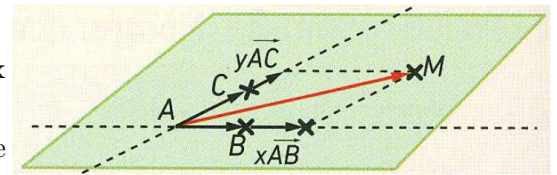
B. Caractérisation vectorielle d'un plan

Propriété 8.

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace.

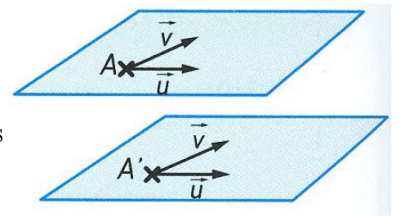
Un point M appartient au plan (ABC) si et seulement si il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$

On dit que le plan (ABC) est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs directeurs du plan (ABC).



Remarque 5.

Deux plans dirigés par un même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles



C. Vecteurs coplanaires

Définition 1.

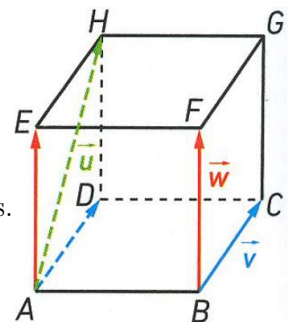
Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

$\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dits coplanaires lorsque A, B, C et D appartiennent au même plan (A, B, C et D coplanaires).

Exemple 2.

$\vec{u} = \overrightarrow{AH}, \vec{v} = \overrightarrow{BC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{BF}$. On a $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$.

Or, A, D, H et E sont quatre points coplanaires, donc les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.



Propriété 9.

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

$\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Démonstration.

Soient A un point de l'espace, et B, C et D les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

Ils définissent donc le plan (ABC).

Par définition, $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si D appartient au plan (ABC).

Donc, d'après la propriété 8, si, et seulement s'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

C'est à dire $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

III. Positions relatives

A. Rappels des règles de base

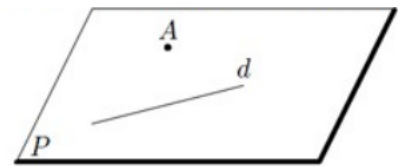
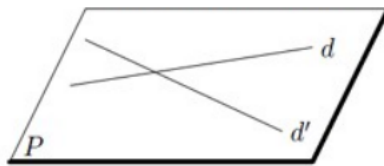
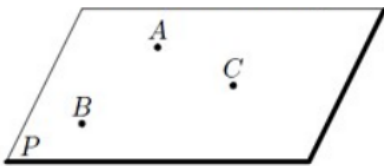
- Par deux points distincts de l'espace, il passe une unique droite, qui peut être notée (AB).
- Par trois points non alignés A, B et C, il passe un unique plan, qui peut être noté (ABC).
- Si deux points distincts A et B appartiennent à un plan $\mathcal{P}$, alors tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan $\mathcal{P}$.

Un plan peut donc être déterminé par l'une des conditions suivantes :

trois points non alignés

deux droites sécantes

une droite et un point extérieur à celle-ci



Les résultats de la géométrie plane sont vrais dans n'importe quel plan de l'espace.

B. Positions relatives de droites et plans

B.1 Positions relatives de deux droites

Définition 2.

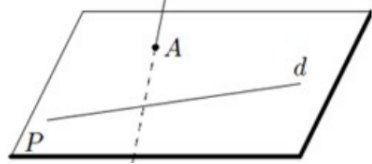
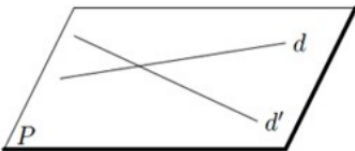
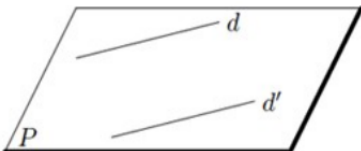
Deux droites de l'espace sont dites :

- **coplanaires** si elles sont contenues dans le même plan ;
- **parallèles** si elles sont contenues dans le même plan et si elles sont parallèles dans ce plan ;
- **non coplanaires** s'il n'existe aucun plan contenant ces deux droites.

Propriété 10.

Soit d et d' deux droites distinctes.

Les configurations suivantes sont les seules possibles :

Non coplanaires	Coplanaires	
	sécantes	parallèles non confondues
		

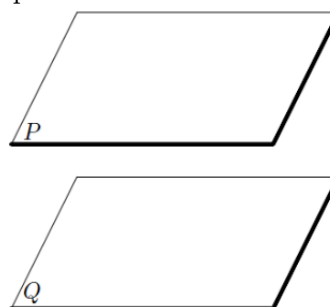
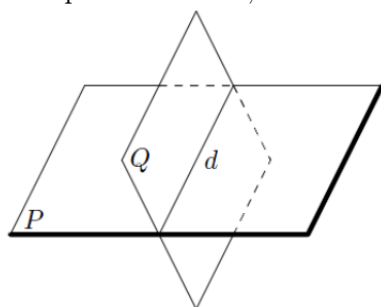
B..2 Positions relatives de deux plans

Propriété 11.

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux plans distincts.

Les configurations suivantes sont les seules possibles :

- les plans ont un point commun, alors ils sont sécants suivant une droite passant par ce point ;
- ils n'ont aucun point commun, alors ils sont strictement parallèles

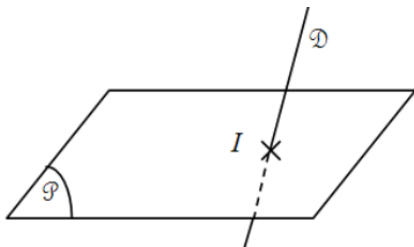
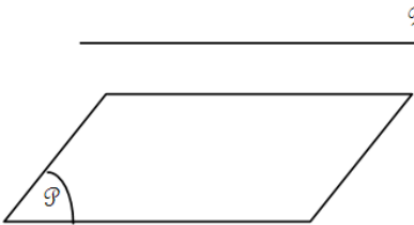


B..3 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Propriété 12.

Soit $\mathcal{P}$ un plan et $\mathcal{D}$ une droite non incluse dans ce plan.

Les configurations suivantes sont les seules possibles :

Sécants : $\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = I$	Parallèles : $\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = \emptyset$
	

C. Propriétés liées au parallélisme

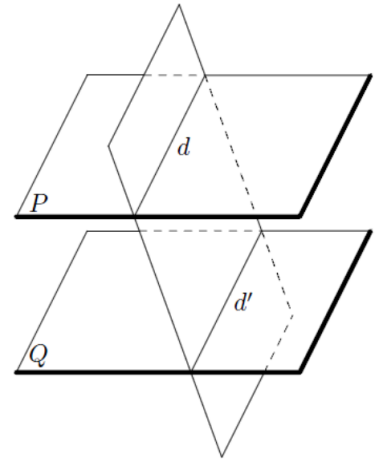
C..1 Parallélisme entre droites

Propriété 13.

Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles.

Propriété 14.

Si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

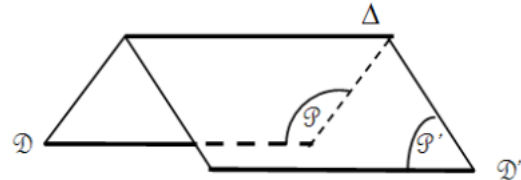


Théorème 2. « Théorème du toit »

Si :

- $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux droites parallèles
- $\mathcal{P}$ est un plan contenant $\mathcal{D}$, $\mathcal{P}'$ est un plan contenant $\mathcal{D}'$
- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants selon une droite Δ

Alors Δ est parallèle à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.



C..2 Parallélisme entre plans

Propriété 15.

Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux



Propriété 16.

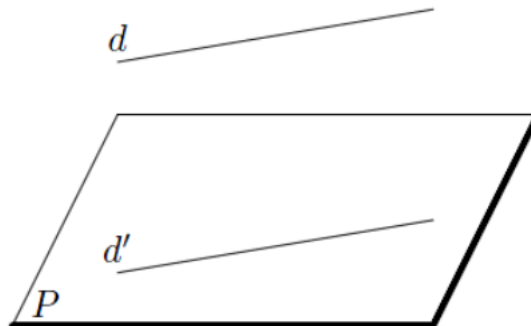
Si un plan $\mathcal{P}$ contient deux droites sécantes et parallèles à un plan $\mathcal{P}'$, alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.



C..3 Parallélisme entre droites et plans

Propriété 17.

Si une droite d est parallèle à une droite d' , alors la droite d est parallèle à tout plan $\mathcal{P}$ contenant la droite d' .



D. Orthogonalité

D..1 Orthogonalité de deux droites

Définition 3.

Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonales dans l'espace lorsque leurs parallèles respectives menées par un point quelconque de l'espace sont perpendiculaires.

On note alors $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}'$. Attention, c'est la même notation que pour la perpendicularité.

Remarque 6.

Il ne faut pas confondre l'orthogonalité de la perpendicularité.

- Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes.
- Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires, et donc pas nécessairement sécantes.

Donc, « deux droites perpendiculaires sont orthogonales » .

La réciproque est fausse.

ATTENTION : deux droites orthogonales à une même troisième ne sont pas nécessairement parallèles...

D..2 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

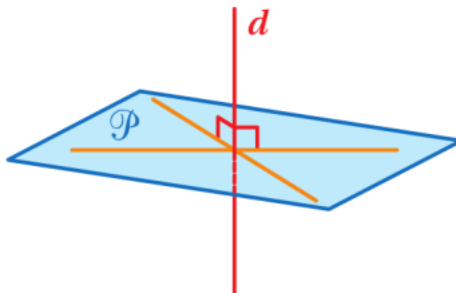
Définition 4.

Une droite $\mathcal{D}$ est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ si elle est orthogonale à toutes les droites du plan $\mathcal{P}$.

On note : $\mathcal{D} \perp \mathcal{P}$.

Théorème 3.

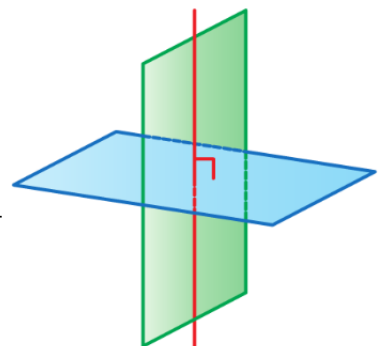
Si une droite d est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{P}$, alors elle est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.



D..3 Perpendicularité de deux plans

Définition 5.

Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un d'eux contient une droite orthogonale à l'autre.



IV. Repères de l'espace

A. Bases de l'espace

Définition 6.

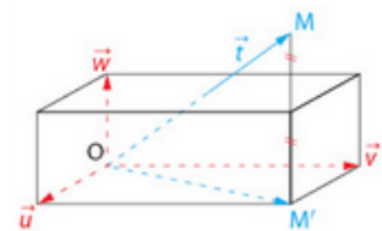
Une base de l'espace est un triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ formé de vecteurs **non coplanaires**.

Propriété 18.

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.

Pour tout vecteur $\vec{t}$, il existe **un unique** triplet $(a ; b ; c)$ de nombres réels tels que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.
 $(a ; b ; c)$ est le triplet des **coordonnées** du vecteur $\vec{t}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Exemple 3.



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}.$$

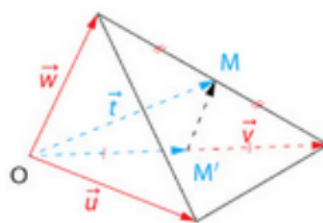
$$\overrightarrow{OM} = \vec{u} + \vec{v} + 2\vec{w}.$$

$\vec{t}$ a pour coordonnées $(1 ; 1 ; 2)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}.$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}.$$

$\vec{t}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.



B. Repères de l'espace

Définition 7.

Un **repère** de l'espace, noté $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, est formé d'un point O et d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs de l'espace.

Propriété 19.

$(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace Pour tout point M, il existe un unique triplet $(x ; y ; z)$ de réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

$(x ; y ; z)$ est le triplet de **coordonnées** du point M dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, x est l'**abscisse** de M, y est son **ordonnée** et z est sa **cote**.

C. Calculs sur les coordonnées

Propriété 20.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x ; y ; z)$ et $(x' ; y' ; z')$ dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ alors :
 - le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x' ; y + y' ; z + z')$;
 - pour tout réel λ , le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées $(\lambda x ; \lambda y ; \lambda z)$
- Si A et B ont pour coordonnées $(x_A ; y_A ; z_A)$ et $(x_B ; y_B ; z_B)$ dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, alors :
 - le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$;
 - le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} ; \frac{z_A + z_B}{2} \right)$.