

CHAPITRE 3 - LE RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE



Vers 300 avant notre ère, EUCLIDE démontre que l'ensemble des nombres premiers est arbitrairement grand.

La notion d'ensembles infinis divise les mathématiciens et mène à des paradoxes connus, tel que « à chaque nombre entier, on peut faire correspondre un nombre pair ; pourtant il y en a deux fois plus ... »

Au Moyen-Âge, des mathématiciens utilisent un raisonnement par récurrence sans le dire. Ainsi, vers 1200, Leonardo FIBONACCI établit un algorithme de décomposition d'un nombre rationnel en une somme de fractions distinctes de numérateur 1.

En 1654, Blaise PASCAL énonce le principe de récurrence dans son *Traité du triangle arithmétique*.

En 1874, Georg CANTOR formalise la définition d'un ensemble : « Par ensemble, on entend un groupement en un tout, d'objets bien distincts de notre intuition ou de notre pensée ».

GIUSEPPE PEANO (1858-1932), analyste et logicien italien, donna la formulation actuelle du raisonnement par récurrence lors de sa construction axiomatique de l'ensemble $\mathbb{N}$. Ce raisonnement utilise son cinquième axiome, appelé aussi principe de récurrence : « Si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est égal à $\mathbb{N}$ ».

I. Rappels de première sur les suites

A. Généralités

Les suites numériques sont des outils mathématiques qui permettent de modéliser une situation qui évolue : taux d'intérêt, évolution d'une population, désintégration d'un élément radioactif...

A..1 Définir une suite numérique

Une suite numérique est une suite de nombres réels, par exemple : 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13 etc.

On peut noter une telle liste de nombres $u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 ; u_5 ; u_6 ; u_7 ; \dots ; u_n ; u_{n+1} ; \dots$

u_0 est alors appelé le premier terme de la suite u ou $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, u_1 le deuxième terme et on dit que la suite a pour terme général u_n . Attention, u_{10} est le 11^{ème} terme.

Définir une suite $u_0, u_1, u_2, \dots$ c'est associer à 0 un nombre u_0 , à 1 un nombre u_1 et de façon générale, à tout entier n un nombre noté u_n . On peut donc voir une suite comme une fonction dont l'ensemble de définition est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

Exemple 1.

1. Soit la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 1$.

On a $u_0 = 0^2 - 1 = -1$, $u_3 = 3^2 - 1 = 8$, $u_{38} = 38^2 - 1 = 1443$ ou encore $u_{n^2} = (n^2)^2 - 1 = n^4 - 1$.

On remarque que **chaque terme est fonction de son rang**.

Une telle **suite** est dite **définie explicitement** et on peut écrire $u_n = f(n)$ où $f : x \rightarrow x^2 - 1$.

Ces suites sont souvent représentées par des nuages de points de coordonnées $(n ; u_n)$.

2. Toutes les suites ne sont pas définies de cette façon : on peut définir une suite par la donnée de son premier terme et d'une relation qui permet de calculer à partir de chaque terme le terme suivant, par exemple : $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 1$.

On a : $u_1 = u_{0+1} = (u_0)^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$ (on remplace n par 0 dans la formule de récurrence) ;

$u_2 = u_{1+1} = (u_1)^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$ (on remplace n par 1 dans la formule de récurrence) ;

$u_3 = u_{2+1} = (u_2)^2 - 1 = 8^2 - 1 = 63$ (on remplace n par 2 dans la formule de récurrence) ;

$u_4 = u_{3+1} = (u_3)^2 - 1 = 63^2 - 1 = 3968$ (on remplace n par 3 dans la formule de récurrence) ;

On remarque que **chaque terme est fonction du terme précédent**.

Une telle **suite** est dite **définie par récurrence** et on peut écrire $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \rightarrow x^2 - 1$.

Attention, ici pour calculer u_{38} il faut auparavant avoir calculé $u_1, u_2, u_3, \dots$ jusqu'à u_{37} !

A..2 Sens de variation et limite d'une suite numérique

Propriété 1.

Une suite u est :

- croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$
- décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$

Une conséquence fondamentale est que pour étudier le sens de variation d'une suite u , on étudie le signe, pour tout entier n , de la différence $u_{n+1} - u_n$.

S'intéresser à la limite d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ c'est étudier le comportement des termes quand on donne à n des valeurs entières aussi grandes que l'on veut.

Une suite peut avoir pour limite un nombre réel, $+\infty$, ou encore ne pas avoir de limite.

Une suite (u_n) a pour limite l quand n tend vers $+\infty$, si les termes deviennent tous aussi proches de l que l'on veut, à condition de prendre n suffisamment grand.

Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, si les termes deviennent tous aussi grands que l'on veut, à condition de prendre n suffisamment grand.

Nous reviendrons plus en détail sur la notion de limite d'une suite dans le chapitre 4.

B. Les suites arithmétiques

Définition 1.

Une suite est dite arithmétique lorsque l'écart entre deux termes consécutifs est constant. On appelle alors cet écart la raison de la suite.

Dit autrement, une suite u de premier terme u_0 donné est arithmétique s'il existe un réel r (la raison) tel que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + r$.

Ainsi une suite arithmétique est définie par récurrence car chaque terme est fonction du précédent.

Exemple 2.

Considérons la suite u dont les premiers termes sont 1 ; 4 ; 7 ; 10 ; 13 ; ...

On passe d'un terme au suivant en ajoutant 3 à chaque fois.

Ce sont les premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 3$.

La formule de récurrence est : $u_{n+1} = u_n + 3$.

On a vu que lorsqu'une suite était définie par récurrence, il n'était à priori pas possible de calculer directement n'importe quel terme.

Pourtant ici, il est tentant d'essayer de trouver un moyen de le faire. Et c'est justement pour cela que nous étudions, entre autres, les suites arithmétiques.

Regardons par exemple u_6 :

$$\begin{aligned} u_6 &= u_5 + 3 \\ &= (u_4 + 3) + 3 = u_4 + 2 \times 3 \\ &= u_3 + 3 + 3 + 3 = u_3 + 3 \times 3 \\ &= u_2 + 3 + 3 + 3 + 3 = u_2 + 4 \times 3 \end{aligned}$$

et ainsi de suite

$$u_6 = u_0 + 6 \times 3.$$

On comprend que cela se généralise aisément à toute suite arithmétique et à n'importe quel terme.

Par exemple : $u_{100} = u_0 + 100 \times 3 = 301$.

Propriété 2 (Formule explicite pour une suite arithmétique).

Soit u une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r . On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 + n \times r$$

Plus généralement, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_p + (n - p) \times r$$

Ainsi, le terme général d'une suite arithmétique peut toujours s'exprimer de façon explicite.

Propriété 3 (Variations d'une suite arithmétique).

On considère une suite arithmétique u de premier terme u_0 et de raison r .

- Elle est représentée par des points alignés sur la droite de coefficient directeur r et d'ordonnée à l'origine u_0 .
- Si $r > 0$ alors u est croissante et sa limite quand n tend vers $+\infty$ est $+\infty$.
- Si $r < 0$ alors u est décroissante et sa limite quand n tend vers $+\infty$ est $-\infty$.
- Si $r = 0$ alors u est constante et sa limite quand n tend vers $+\infty$ est u_0 .

Propriété 4 (Somme des n premiers entiers naturels).

Pour tout entier naturel n on a :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Exemple 3.

1. $1 + 2 + 3 + \dots + 1000 = \frac{1000 \times (1000 + 1)}{2} = 500500$
2. Si u est arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 5, alors :

$$\begin{aligned}
 u_0 + u_1 + \dots + u_{30} &= u_0 + (u_0 + r) + \dots + (u_0 + 30r) \\
 &= (u_0 + \dots + u_0) + r \times (1 + 2 + \dots + 30) \\
 &= 31u_0 + r \times \frac{30 \times 31}{2} \\
 &= 31 \times 3 + 5 \times 465 \\
 &= 2418
 \end{aligned}$$

Il vous suffit donc seulement de retenir la formule de la propriété car on en déduit aisément le calcul de la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique comme vu dans l'exemple précédent.

C. Les suites géométriques**Définition 2.**

Une suite est dite géométrique lorsque le taux d'évolution entre deux termes consécutifs est constant.

Dit autrement, une suite est géométrique si le rapport de deux termes consécutifs est constant. On appelle alors ce rapport la raison de la suite.

Une suite v de premier terme v_0 donné est donc géométrique s'il existe un réel q (la raison) tel que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = v_n \times q$.

Ainsi une suite géométrique est définie par récurrence car chaque terme est fonction du précédent.

Exemple 4.

Considérons la suite v dont les premiers termes sont 3 ; 6 ; 12 ; 24 ; 48 ; ...

On passe d'un terme au suivant en multipliant par 2 à chaque fois.

Ce sont les premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison $q = 2$.

La formule de récurrence est : $v_{n+1} = v_n \times 2$.

Encore une fois, lorsqu'une suite était définie par récurrence, il n'est à priori pas possible de calculer directement n'importe quel terme.

Pourtant, dans le cas d'une suite géométrique, il n'est pas difficile de trouver une formule explicite.

Par exemple, comment calculer v_5 directement ?

$$\begin{aligned}
 v_5 &= v_4 \times 2 \\
 &= (v_3 \times 2) \times 2 = v_3 \times 2^2 \\
 &= (v_2 \times 2) \times 2 \times 2 = v_2 \times 2^3
 \end{aligned}$$

et ainsi de suite

$$v_5 = v_0 \times 2^5.$$

On comprend que cela se généralise aisément à toute suite géométrique et à n'importe quel terme.

Par exemple : $v_{15} = v_0 \times q^{15} = 3 \times 2^{15} = 98304$.

Propriété 5 (Formule explicite pour une suite géométrique).

Soit v une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q . On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 \times q^n$$

Plus généralement, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$,

$$v_n = v_p \times q^{n-p}$$

Ainsi, le terme général d'une suite géométrique peut toujours s'exprimer de façon explicite.

Propriété 6 (Variations d'une suite géométrique).

On considère une suite géométrique v de premier terme v_0 et de raison $q > 0$.

- Si $0 < q < 1$ alors :
 - si $u_0 < 0$, v est croissante et sa limite quand n tend vers $+\infty$ est 0.
 - si $u_0 > 0$, v est décroissante et sa limite quand n tend vers $+\infty$ est 0.
- Si $q > 1$ alors :
 - si $u_0 < 0$, v est décroissante et sa limite quand n tend vers $+\infty$ est $-\infty$.
 - si $u_0 > 0$, v est croissante et sa limite quand n tend vers $+\infty$ est $+\infty$.

Propriété 7 (Somme des puissances d'un réel).

Pour tout entier naturel n et tout réel q différent de 1, on a :

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exemple 5.

1. $1 + 5 + 25 + 125 + \cdots + 9765625 = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \cdots + 5^{10} = \frac{1 - 5^{11}}{1 - 5} = \frac{-48828124}{-4} = 12207031$
2. Si v est géométrique de premier terme $v_0 = 7$ et de raison 3, alors :

$$\begin{aligned} v_0 + v_1 + \cdots + v_{15} &= v_0 + (v_0 \times q) + \cdots + (v_0 \times q^{15}) \\ &= v_0 \times (1 + q + \cdots + q^{15}) \\ &= v_0 \times \left(\frac{1 - q^{16}}{1 - q} \right) \\ &= 7 \times \left(\frac{1 - 3^{16}}{1 - 3} \right) \\ &= 150663520 \end{aligned}$$

Il vous suffit donc seulement de retenir la formule de la propriété car on en déduit aisément le calcul de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique comme vu dans l'exemple précédent.

II. Le raisonnement par récurrence

On considère une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier n .

Pour démontrer que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie quelque soit l'entier $n \geq 0$, on procédera toujours en deux étapes :

- L'initialisation : on montre que la propriété est vraie au rang 0, c'est à dire qu'on montre que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- L'hérédité : on se donne un entier $k \geq 0$ et on montre que si la propriété $\mathcal{P}(k)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(k+1)$ est également vraie.

Le principe de récurrence stipule alors que si ces deux étapes sont vérifiées, on peut en déduire que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie quelque soit l'entier $n \geq 0$.

Remarque 1.

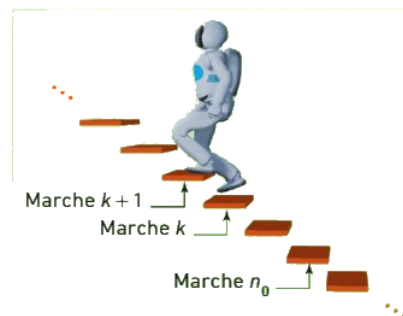
- On ne démontrera pas en terminale pourquoi le principe de récurrence fonctionne effectivement. Il est basé sur une propriété de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.
- Notez bien que les deux étapes sont indispensables.
Nous verrons des exemples de raisonnement où notre démonstration sera fausse car on aura oublié une des deux étapes.
- Dans la propriété énoncée, on peut remplacer les "0" par n'importe quel autre entier n_0 .
On l'appelle le rang initial, et celui-ci dépendra de chaque cas de figure.
- Notez que dans l'hérédité, il ne s'agit pas de montrer que $\mathcal{P}(k)$ ou $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie mais bien de montrer une implication : on souhaite montrer que si $\mathcal{P}(k)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(k+1)$ l'est également.

Illustration : image de l'escalier

Si on peut :

- accéder à une marche n_0 de l'escalier (initialisation)
- et monter d'une marche quelconque à la suivante (propriété d'hérédité),

Alors on peut accéder à n'importe quelle marche au-dessus de n_0 .



Exemple 6.

1. Montrons que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

On considère donc la propriété $\mathcal{P}(n) : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation : pour $n = 1$,

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = 1 \text{ est bien égal à la somme de gauche.}$$

La propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : on considère un entier $k \geq 1$.

On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est à dire que $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Notre objectif est de montrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est alors vraie. Mais $\mathcal{P}(k+1)$, qu'est-ce que c'est ?

$$\mathcal{P}(k+1) : 1 + 2 + 3 + \dots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Montrons donc que cela est vrai.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + (k+1) &= (1 + 2 + \dots + k) + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \text{ par mise au même dénominateur} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \text{ en factorisant} \end{aligned}$$

Et c'est ce qu'on voulait !

On a démontré que si $\mathcal{P}(k)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(k+1)$ l'est également.

Par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie quelque soit l'entier $n \geq 1$.

On a donc redémontré la formule découverte en classe de première, mais par une autre méthode.

2. Un mauvais raisonnement par récurrence.

Considérons, pour $n \geq 1$ la proposition « 2^n est un multiple de 3 ».

Montrons qu'elle est héréditaire.

En effet, supposons que pour un certain entier $k \geq 1$, la propriété est vraie.

Cela signifie que 2^k est un multiple de 3, c'est à dire qu'il existe un entier m tel que $2^k = 3 \times m$.

Mais alors :

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2 \times 2^k \text{ d'après les règles sur les puissances} \\ &= 2 \times 3m \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= 3 \times (2m) \end{aligned}$$

Et donc, 2^{k+1} est également un multiple de 3, et donc la propriété est bien alors vraie au rang $k+1$.

Pourtant, pour tout entier n , cette proposition est fausse : vous savez bien qu'une puissance de 2 n'est pas divisible par 3...

Alors, où est l'erreur ?

En fait, on ne peut simplement pas appliquer le principe de récurrence pour conclure, car on n'a pas traité l'initialisation.

Et pour cause, l'initialisation n'est pas vraie : $2^1 = 2$ n'est pas un multiple de 3...