

CHAPITRE 4 - LOI BINOMIALE



JACOB BERNOULLI (parfois francisé en Jacques) est l'aîné de la famille des Bernoulli, famille de mathématiciens suisses d'origine belge. Ses parents, qui sont de riches commerçants, souhaitent qu'il étudie la théologie et la philosophie, ce qu'il fait d'ailleurs puisqu'il obtint un diplôme dans ces deux disciplines, mais ses intérêts se portent rapidement vers l'astronomie et les mathématiques. Après ses études, il entreprend de 1676 à 1683 des voyages en France, en Angleterre, aux Pays-Bas ; il en profite pour rencontrer de nombreux mathématiciens et commencer une riche correspondance. De retour à Bâle, il devient professeur à l'université, poste qu'il occupera jusqu'à la fin de ses jours. Jacob eut deux enfants dont aucun, fait exceptionnel dans cette famille, ne fut scientifique.

Les principaux travaux de Jacob datent de son retour à Bâle, et bénéficient sans doute de l'émulation avec son frère JOHANN BERNOULLI. Les deux frères collaborent dans un premier temps, étudiant l'œuvre de LEIBNIZ, qui vient d'inventer le calcul différentiel. Mais ils se fâchent vite, se disputent la priorité des découvertes, et s'envoient des défis par revues interposées.

Outre cette étude, Jacob s'intéresse :

- au calcul différentiel donc (c'est d'ailleurs à lui qu'on doit le premier emploi du terme « calcul intégral ») ;
- aux séries (il prouve rigoureusement la convergence de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$) ;
- au calcul des probabilités (il démontre notamment la loi faible des grands nombres pour le jeu du pile ou face, qu'on appelle maintenant schéma de Bernoulli) ;
- à certaines courbes (spirale logarithmique, cycloïde, lemniscate) qui l'amènent notamment à résoudre un certain type d'équations différentielles.
- à certains polynômes et nombres, auxquels il a laissé son nom.

Jacob Bernoulli aimait particulièrement la spirale logarithmique, et ses propriétés d'invariance. Il demanda à ce que l'on en grave une sur sa tombe, accompagnée des mots « *Eadem mutata resurgo* », qui signifient « *Elle renaît changée en elle-même* ». Hélas, le graveur, mauvais mathématicien, dessina une spirale d'ARCHIMÈDE !

I. Succession d'épreuves indépendantes

A. Modélisation d'une succession d'épreuves indépendantes

Définition 1.

Dans une succession d'épreuves, lorsque l'issue d'une épreuve ne dépend pas des épreuves précédentes, on dit que ces épreuves sont **indépendantes**.

Univers et issues d'une succession d'épreuves indépendantes

On considère n épreuves successives indépendantes d'univers $E_1, E_2, \dots, E_n$.

L'univers de cette succession de n épreuves successives indépendantes est le **produit cartésien** :

$$E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n.$$

Les issues de E sont les n -uplets où $x_i \in E_i$ pour tout entier naturel i , avec $1 \leq i \leq n$.

Propriété 1 (admise).

Dans une succession de n épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue $(x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n)$ est égale au **produit** des probabilités des issues de ses composantes $x_1, x_2, \dots, x_n$.

B. Un exemple

On lance un dé tétraédrique équilibré dont les quatre sommets sont numérotés 1, 2, 3, 4.

L'univers de cette expérience aléatoire est $E_1 = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.

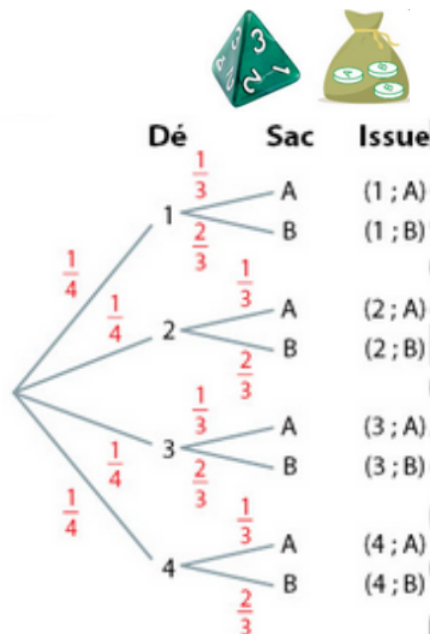
Puis, on tire au hasard un jeton d'un sac contenant un jeton A et deux jetons B .

L'univers de cette expérience aléatoire est $E_2 = \{A ; B\}$.

Voici la loi de probabilité de chacune de ces épreuves :

Issue	1	2	3	4
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Issue	A	B
Probabilité	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$



La succession de ces deux épreuves indépendantes a pour univers $E = E_1 \times E_2$.

On représente ces issues à l'aide de l'arbre ci-contre.

Par exemple :

$$P(1 ; A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

$$P(3 ; A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

$$P(1 ; B) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

D'où la loi de probabilité de la succession de ces deux épreuves indépendantes.

Issue	(1 ; A)	(1 ; B)	(2 ; A)	(2 ; B)	(3 ; A)	(3 ; B)	(4 ; A)	(4 ; B)
Probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

Dans un arbre de probabilités, retenez que **la probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches le composant**.

II. Épreuve et schéma de Bernoulli

A. Épreuve de Bernoulli

Définition 2.

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues.

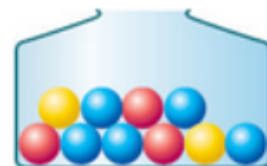
L'une est souvent appelée **succès** et notée S , l'autre est souvent appelée **échec** et notée $\bar{S}$.

Exemple 1.

Une urne contient dix boules indiscernables au toucher : 5 bleues, 2 jaunes et 3 rouges.

On tire une boule au hasard.

Cette expérience a trois issues, mais l'on peut considérer qu'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli en prenant comme succès, par exemple, S : « Tirer une boule rouge » et pour échec $\bar{S}$: « Tirer une boule bleue ou jaune ».



B. Loi de Bernoulli

Définition 3.

On considère une épreuve de Bernoulli où la probabilité du succès est p .

X est la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.

La loi de probabilité de X , présentée dans le tableau ci-contre, est appelée **loi de Bernoulli de paramètre p** .

a	0	1
$P(X = a)$	$1 - p$	p

Exemple 2.

On reprend l'exemple du paragraphe précédent.

$$p = P(S) = \frac{3}{10} = 0,3$$

Voici ci-contre la loi de Bernoulli de paramètre 0,3.

a	0	1
$P(X = a)$	0,7	0,3

Conséquence L'espérance et la variance de X sont :

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1 - p).$$

En effet, $E(X) = (1 - p) \times 0 + p \times 1 = p$.

Et $V(X) = (1 - p) \times (0 - p)^2 + p \times (1 - p)^2 = p(1 - p)(p + 1 - p) = p(1 - p)$.

C. Schéma de Bernoulli

Définition 4.

Un **schéma de Bernoulli** est une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

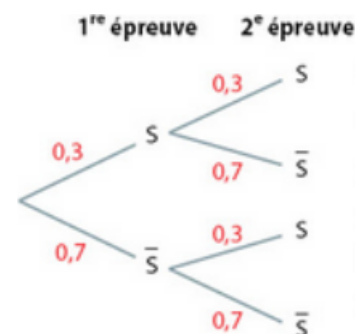
Exemple 3.

On reprend l'exemple du paragraphe précédent.

On répète deux fois l'épreuve de Bernoulli en remplaçant la boule dans l'urne avant chaque nouveau tirage.

Le fait de replacer la boule dans l'urne assure que les tirages sont identiques et indépendants.

Cela constitue un schéma de Bernoulli qui peut être représenté par l'arbre pondéré ci-contre.



III. Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

A. Loi du nombre de succès

Définition 5.

On considère un schéma de Bernoulli constitué de n épreuves où la probabilité du succès est p .

X est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès lors de ces n épreuves.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée **loi binomiale** (ou loi du nombre de succès) **de paramètres n et p** . On la note $\mathcal{B}(n ; p)$.

Remarque 1.

La variable aléatoire X prend donc toutes les valeurs entières entre 0 (aucun succès) et n (uniquement des succès).

Propriété 2.

X est la variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$.

Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Démonstration.

Les n épreuves répétées sont identiques et indépendantes donc un chemin de l'arbre réalisant k succès de probabilité p , et $n - k$ échecs de probabilité $1 - p$, conduit à une issue dont la probabilité est donnée par $p^k (1 - p)^{n-k}$.

Or, il y a $\binom{n}{k}$ chemins réalisant k succès, donc $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

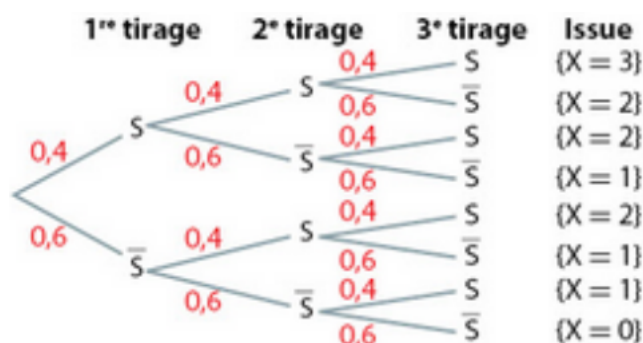
B. Exemple

On tire trois fois, successivement et avec remise, une boule de l'urne ci-contre.

Pour chaque tirage, on associe au succès S l'issue : « La boule tirée est rouge ».

Donc $p = \frac{2}{5} = 0,4$.

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès sur les $n = 3$ tirages suit la loi binomiale de paramètres 3 et $0,4$, c'est-à-dire $\mathcal{B}(3 ; 0,4)$.



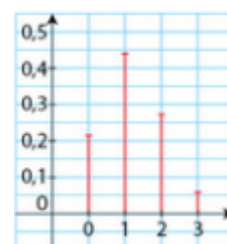
Par exemple,

$$\begin{aligned}
 P(X = 1) &= \binom{3}{1} 0,4^1 \times (1 - 0,4)^{3-1} \\
 &= 3 \times 0,4 \times 0,6^2 \\
 &= 0,432
 \end{aligned}$$

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	0,216	0,432	0,288	0,064

Voici ci-contre le diagramme en bâtons représentant graphiquement la loi binomiale $\mathcal{B}(3 ; 0,4)$.



C. Échantillonnage (HORS PROGRAMME)

C..1 Position du problème

Dans une population, on suppose qu'un caractère est présent dans la proportion p . Pour juger cette hypothèse, on prélève au hasard et avec remise un échantillon de taille n et on observe la fréquence f du caractère étudié. On cherche alors à savoir quelles valeurs de f on pourra considérer comme suffisamment éloignées de p pour rejeter l'hypothèse.

C..2 Intervalle de fluctuation au seuil de 95%

X est la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus de l'échantillon qui présentent le caractère étudié. Alors X suit la loi binomiale de paramètres n et p . On partage l'intervalle $[0; n]$ en trois intervalles $[0; a - 1]$, $[a; b]$, $[b + 1; n]$. (a et b nombres entiers naturels compris entre 1 et $n - 1$) de façon que X prenne ses valeurs dans chacun des deux intervalles extrêmes avec une probabilité aussi proche que possible de 0,025 sans la dépasser.

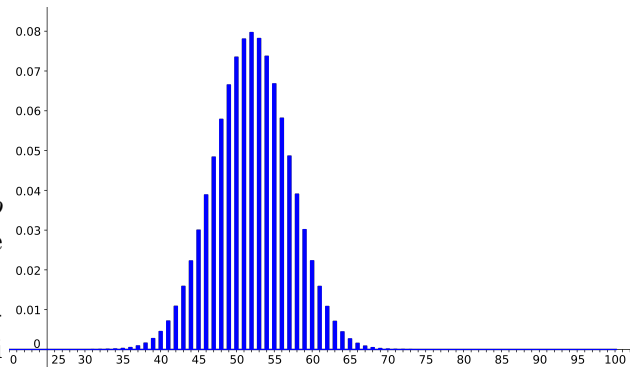
Définition 6.

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence f est l'intervalle $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$ où :

- a est le plus petit nombre entier naturel tel que $P(X \leq a) > 0,025$;
- b est le plus petit nombre entier naturel tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$

Remarque 2.

- Il découle de la définition que $P(X \leq a - 1) \leq 0,025$ et $P(X \geq b + 1) \leq 0,025$.
- $P(a \leq X \leq b) = P(X \geq a) - P(X \leq b - 1)$ donc $P(a \leq X \leq b) \geq 0,975 - 0,025 \geq 0,95$.
- Pour au moins 95% des échantillons de taille n , la fréquence observée appartient à l'intervalle $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$.
- Cet intervalle est valable pour toutes les valeurs de n et p possibles alors que l'intervalle utilisé en classe de Seconde est seulement valable dans le cas où $n > 25$ et $0,2 < p < 0,8$. Si ces conditions sont vérifiées, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% obtenu avec la loi binomiale diffère peu de l'intervalle de fluctuation vu en Seconde.



C..3 Règle de décision

- Si $f \in \left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$, alors **on ne peut rejeter l'hypothèse** selon laquelle la proportion du caractère dans la population est égale à p .
- Si $f \notin \left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$, alors **on rejette l'hypothèse**.

Remarque 3.

Attention, il peut arriver que l'on rejette l'hypothèse alors qu'elle est vraie, mais la probabilité de cette situation est inférieure à 5%.

Exemple 4 (Prendre une décision à l'aide d'un intervalle de fluctuation).

Les riverains d'un boulevard estiment que 35% des automobilistes ne respectent pas la limitation de vitesse à 50km/h. La police procède alors à un contrôle de vitesse d'un échantillon de 320 véhicules.

Le grand nombre de véhicules qui circulent sur ce boulevard permet d'assimiler ce contrôle à un tirage au hasard avec remise.

La police a relevé 97 infractions, ce résultat remet-il en cause le pourcentage avancé par les riverains ?

- Formalisation

X est la variable aléatoire qui donne le nombre d'automobilistes en excès de vitesse dans un tel échantillon de taille 320. L'échantillon est constitué avec remise et, si les riverains ont raison, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 320$ et $p = 0,35$.

- Détermination d'un intervalle de fluctuation au seuil de 95%

À l'aide de la calculatrice ou du tableur, on affiche les probabilités $p(X \leq k)$ pour tout entier naturel k de 0 à 320.

Le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0,025$ est 95, et le plus petit nombre entier naturel b tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$ est 129.

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% obtenu est alors

$$\left[\frac{95}{320}; \frac{129}{320} \right] = [0,296875; 0,403125].$$

94	0,01911453
95	0,025471596
96	0,033494335
128	0,972545363
129	0,979048048
130	0,98419248

- Conclusion

Lors du contrôle, la fréquence observée est $f = 35\% = 0,35$; elle appartient à l'intervalle de fluctuation donc on ne peut pas rejeter l'hypothèse selon laquelle la proportion des automobilistes en excès de vitesse sur le boulevard est 35%.