

CHAPITRE 5 - CONVEXITÉ



Godfrey HARDY (1877-1947) est un mathématicien anglais qui a enseigné au Trinity College de Cambridge.

Sa collaboration avec le mathématicien LITTLEWOOD, l'une des plus fructueuses dans l'histoire des mathématiques, donnera lieu à des centaines de publications en analyse et en théorie des nombres.

Un peu d'histoire...

Au cours de la seconde guerre punique, en 213 avant notre ère, lors du siège de Syracuse, ARCHIMÈDE aurait orienté des miroirs concaves vers des navires romains pour y concentrer les rayons du soleil et enflammer leurs voiles.

Au début du 19^{ème} siècle, la convexité fait l'objet de travaux par Augustin CAUCHY. Plus tard, à l'aide de fonctions convexes, des mathématiciens démontrent un grand nombre d'inégalités remarquables, dites inégalités de convexité. Ainsi, en 1906, JENSEN démontre une inégalité qui permet notamment la comparaison entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de plusieurs nombres.

Dans les années 1930, HARDY étudie les fonctions convexes. Il consacre son ouvrage *Inégalités* à l'obtention d'inégalités grâce à la convexité.

I. Point de vue graphique

Définition 1.

f est une fonction définie sur un intervalle I .

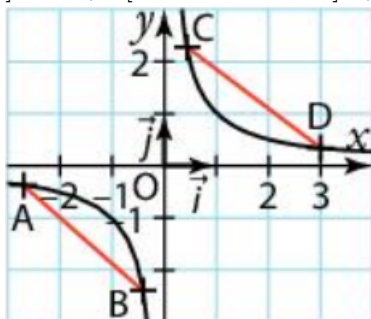
$\mathcal{C}$ est sa courbe représentative sur l'intervalle I dans un repère.

- Dire que f est **convexe** sur I signifie que pour tous points A et B distincts de $\mathcal{C}$, le segment $[AB]$ est **au-dessus** de la courbe $\mathcal{C}$ entre A et B.
- Dire que f est **concave** sur I signifie que pour tous points A et B distincts de $\mathcal{C}$, le segment $[AB]$ est **au-dessous** de la courbe $\mathcal{C}$ entre A et B.

Dit autrement, f est convexe si $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de ses sécantes (ou cordes), et f est concave si $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses sécantes.

Propriété 1 (Fonctions usuelles).

- La fonction racine carrée est concave sur $[0 ; +\infty[$.
- Les fonctions carré et exponentielle sont convexes sur $\mathbb{R}$.
- La fonction inverse est concave sur $] -\infty ; 0[$ et convexe sur $]0 ; +\infty[$.



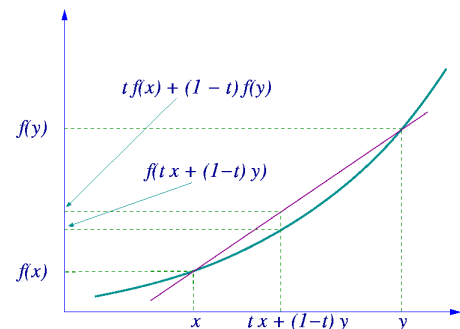
Propriété 2 (Inégalités).

- Si f est une fonction convexe sur un intervalle I alors pour tous réels x et y de I et pour tout $t \in [0 ; 1]$ on a :

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

- Si f est une fonction concave sur un intervalle I alors pour tous réels x et y de I et pour tout $t \in [0 ; 1]$ on a :

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y).$$



Démonstration.

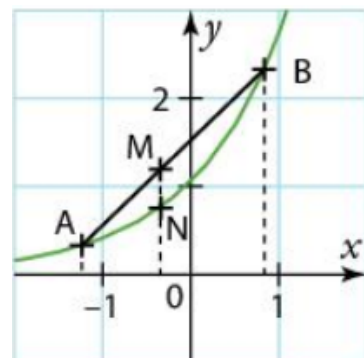
On suppose que la fonction f est convexe sur I .

Soit deux réels x et y et soit t un réel de $[0 ; 1]$. Soit $A(x ; f(x))$ et $B(y ; f(y))$. Alors le point $M(tx + (1-t)y ; tf(x) + (1-t)f(y))$ appartient au segment $[AB]$. f étant convexe, ce segment est situé au-dessus de $\mathcal{C}$.

M est donc situé au-dessus du point $N(tx + (1-t)y ; f(tx + (1-t)y))$.

D'où $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.

Démonstration similaire dans le cas où f est concave.



Remarque 1.

Si les inégalités précédentes sont strictes, on dit que f est une fonction strictement convexe ou strictement concave sur I .

Propriété 3.

f est convexe sur I si et seulement si $-f$ est concave sur I .

Exemple 1.

La fonction définie par $f(x) = -e^x$ est concave sur $\mathbb{R}$.

Définition 2 (Point d'inflexion).

f est une fonction définie sur un intervalle I .

$\mathcal{C}$ est sa courbe représentative dans un repère et $a \in I$.

Dire que $A(a ; f(a))$ est **un point d'inflexion** de $\mathcal{C}$ signifie que la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente au point A, et que $\mathcal{C}$ traverse sa tangente.

Conséquence

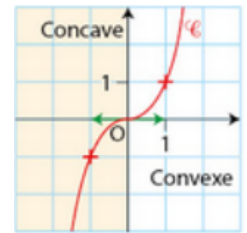
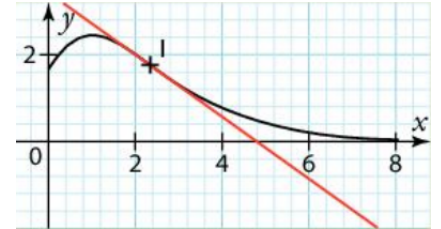
En l'abscisse a d'un point d'inflexion, la fonction f passe de convexe à concave ou de concave à convexe.

Exemple 2.

u est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3$.

L'origine O du repère est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$ représentative de u .

u est concave sur $] -\infty ; 0]$ et convexe sur $[0 ; +\infty[$.



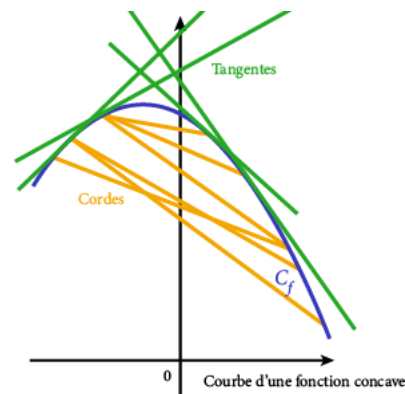
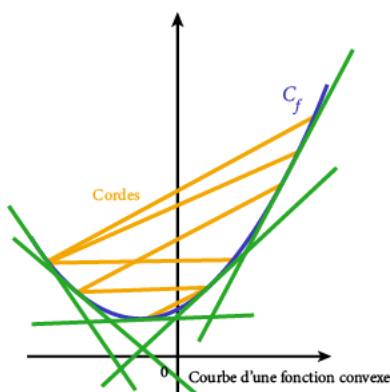
II. Convexité et dérivées

A. Convexité et dérivée première

Propriété 4 (admise).

f est une fonction **dérivable** sur un intervalle I et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

- Dire que f est **convexe** sur I signifie que, la courbe $\mathcal{C}$ est entièrement **au-dessus** de chacune de ses **tangentes**.
- Dire que f est **concave** sur I signifie que, la courbe $\mathcal{C}$ est entièrement **au-dessous** de chacune de ses **tangentes**.



Remarque 2.

Une fonction croissante et convexe sur un I est une fonction qui « croît de plus en plus vite » sur I .

Si elle est dérivable sur I , les pentes de ses tangentes à sa courbe représentative augmentent quand les abscisses augmentent.

De même, une fonction croissante et concave sur un intervalle I est une fonction qui « croît de moins en moins vite » sur I .

B. Convexité et dérivée seconde

Définition 3.

f est une fonction dérivable sur un intervalle I .

Dire que f est deux fois dérivable sur I signifie que f' est elle-même dérivable sur I .

La fonction dérivée de f' , notée f'' , est appelée fonction **dérivée seconde** de f .

Exemple 3.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 1$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x on a $g'(x) = 3x^2 - 8x + 6$.

g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x on a $g''(x) = 6x - 8$ qui définit une fonction affine.

Propriété 5.

f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est **convexe** sur I ;
- (ii) f' est **croissante** sur I ;
- (iii) pour tout réel x de I , $f''(x) \geq 0$.

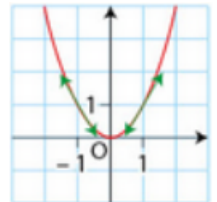
Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est **concave** sur I ;
- (ii) f' est **décroissante** sur I ;
- (iii) pour tout réel x de I , $f''(x) \leq 0$.

Conséquence : si f'' est positive, alors la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de ses tangentes.

En effet, si $f'' \geq 0$, alors f' est croissante sur I donc f est convexe sur I et la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de ses tangentes (et en dessous de ses cordes).

Exemple 4.



1. $f : x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x , $f'(x) = 2x$ et la fonction affine $f' : x \mapsto 2x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

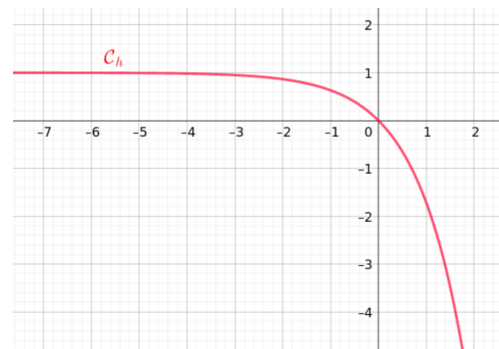
2. Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a dressé le tableau de variations de la fonction g' .

x	$-\infty$	3	$+\infty$
Variations de g'	$+\infty$	0	$+\infty$

Alors g est concave sur $] -\infty ; 3]$ et convexe sur $[3 ; +\infty[$.

h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 1 - e^x$.

3. Pour tout réel x , $h'(x) = -e^x$ et $h''(x) = -e^x$.
Donc, pour tout réel x , $h''(x) < 0$ et h est concave sur $\mathbb{R}$.



C. Point d'inflexion et dérivée seconde

Propriété 6 (admise).

f est une fonction deux fois dérivable sur I .

$\mathcal{C}$ est sa courbe représentative et $a \in I$.

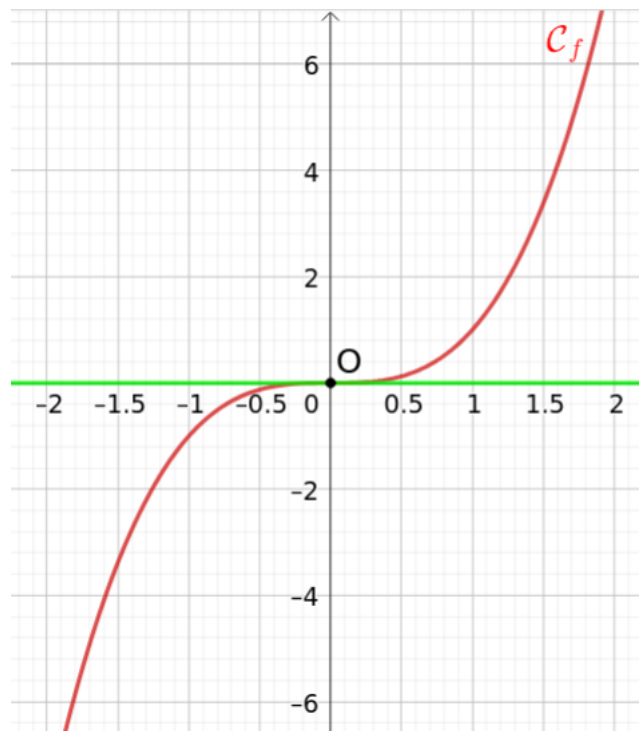
Le point $A(a ; f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}$ si, et seulement si, f'' s'annule en a en changeant de signe .

Exemple 5.

Pour tout réel x , $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de f''	$-$	0	$+$

Avec le tableau de signe ci-dessus, on retrouve le fait que l'origine O du repère est un point d'inflexion de la courbe représentative de f .



En $O(0 ; 0)$:

- La dérivée seconde de la fonction cube s'annule et change de signe ;
- La dérivée première de la fonction cube change de variation, et admet un minimum ;
- La fonction cube admet un point d'inflexion :
 - elle passe de concave à convexe ;
 - sa tangente au point O traverse la courbe ;
 - avant 0 sa courbe est en-dessous de ses tangentes, et au-dessus de ses cordes, et après 0 , sa courbe est au-dessus de ses tangentes, et en-dessous de ses cordes.