

## CHAPITRE 6 - SUITES BORNÉES ET LIMITES DE SUITES



NICOLAS ORESME est un mathématicien, théologien, physicien et astronome français de l'époque médiévale. Il est né vers 1320 près de Caen, probablement dans une famille modeste. Vers 1340, il étudie les "Arts" à Paris, où Jean Buridan est un des professeurs qui l'influence le plus.

Il obtient son doctorat en 1355 et devient l'année suivante grand maître de ce même collège. C'est à cette époque qu'il se lie d'amitié avec le dauphin Charles, qui deviendra le roi de France Charles V en 1364. De 1370 à 1375, à la demande du roi, il traduit et commente les œuvres d'ARISTOTE. C'est un travail d'une importance considérable, qui contribue au rayonnement de la langue française. Charles V le récompense en le nommant évêque de Lisieux en 1378. Nicolas Oresme décède quatre ans plus tard.

Les idées nouvelles introduites par Nicolas Oresme en mathématiques sont étonnamment novatrices pour son époque :

- trois siècles avant DESCARTES, il introduit un système de coordonnées rectangulaires qu'il utilise pour donner des représentations graphiques de fonctions : il signe ainsi les prémices de la géométrie analytique.
- il connaît la notion de valeur moyenne d'une fonction (il sait notamment calculer la vitesse moyenne d'un mouvement à accélération constante) ce qui préfigure le calcul intégral. Ses résultats en cinématique préfigurent ceux de GALILÉE.
- il est le premier à utiliser des puissances d'exposant irrationnel, et il intuite que les nombres irrationnels sont prépondérants parmi les nombres réels. Il faudra attendre CANTOR et la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle pour avoir un énoncé clair de cette intuition.
- il développe une théorie des séries infinies, introduisant leur somme qu'il appelle le « tout ». Surtout, il démontre la divergence de la série harmonique,  $S = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots$  en utilisant ce qu'on appelle de nos jours le critère de... CAUCHY (Cauchy écrivit l'essentiel de son œuvre au début du XIX<sup>ème</sup> siècle).

Mais Nicolas Oresme sera tout autant novateur dans les autres disciplines qu'il a abordées. En astronomie notamment, il mettra en doute la vision aristotélicienne d'un monde où la terre est immobile au centre du monde et préparera ainsi les travaux de COPERNIC.

## I. Généralités sur les suites

Les notions suivantes ont déjà été abordées et vous pourrez vous reporter au premier chapitre pour les y retrouver :

- mode de génération d'une suite
- représentation graphique d'une suite
- suites arithmétiques et suites géométriques

### A. Suites majorées, suites minorées, suites bornées

#### Définition 1.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombre réels.

1. La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **majorée** si et seulement si il existe un réel  $M$  tel que

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_n \leq M.$$

Un tel réel  $M$  s'appelle un **majorant** de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

2. La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **minorée** si et seulement si il existe un réel  $m$  tel que

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_n \geq m.$$

Un tel réel  $m$  s'appelle un **minorant** de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

3. La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **bornée** si et seulement si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est à la fois majorée et minorée. Ceci équivaut au fait qu'il existe deux réels  $m$  et  $M$  tels que

$$\text{pour tout entier naturel } n, m \leq u_n \leq M.$$

#### Attention.

Les réels  $m$  et  $M$  fournis dans la définition précédente sont des réels indépendants de  $n$ . Les réels  $m$  et  $M$  ne varient pas quand  $n$  varie.

Ainsi, si on écrit : pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq 3$ , le nombre 3 est un majorant de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et on a majoré la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  au sens de la définition précédente.

Mais si on écrit : pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq n$ , on n'a pas majoré la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  au sens de la définition précédente.

### B. Sens de variation d'une suite

#### B.1 Définitions

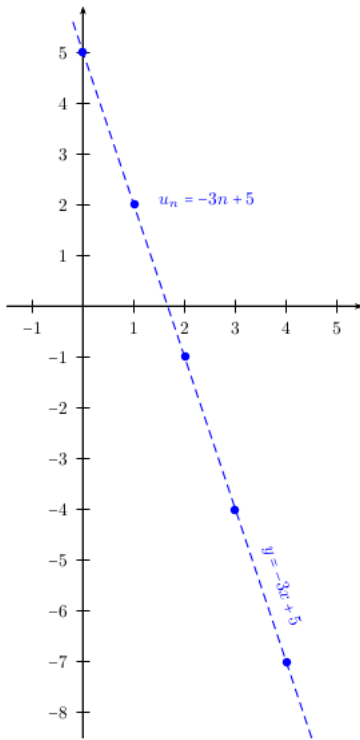
#### Définition 2.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombre réels.

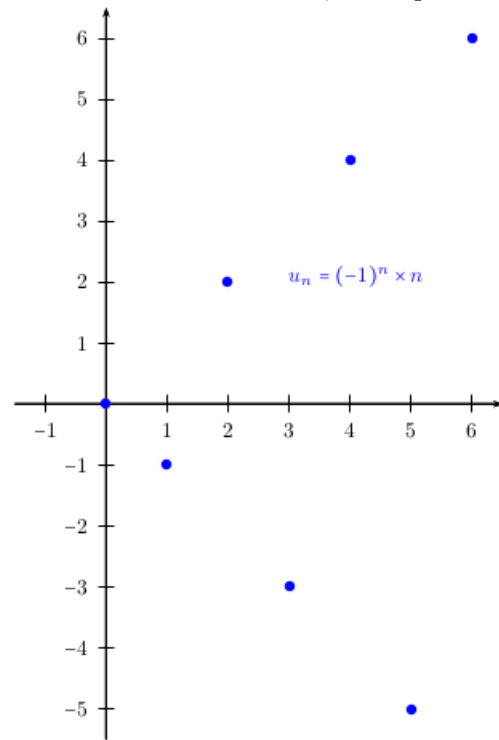
1. La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **croissante** (resp. **strictement croissante**) si et seulement si pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} \geq u_n$  (resp.  $u_{n+1} > u_n$ ).
2. La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **décroissante** (resp. **strictement décroissante**) si et seulement si pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} \leq u_n$  (resp.  $u_{n+1} < u_n$ ).
3. La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **constante** si et seulement si pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n$ . Ceci équivaut au fait que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est à la fois croissante et décroissante.
4. La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **monotone** (resp. **strictement monotone**) si et seulement si ou bien la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante (resp. **strictement croissante**), ou bien elle est décroissante (resp. **strictement décroissante**).

**Exemple 0**

La suite définie par  $u_n = -3n + 5$ ,  
pour tout  $n \in \mathbb{N}$  est strictement décroissante.



La suite définie par  $u_n = (-1)^n \times n$ ,  
pour tout entier naturel  $n$ , n'est pas monotone.

**Théorème 1.**

1. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite croissante de nombres réels. Pour tout entier naturel  $p$  et tout entier naturel  $n \geq p$ , on a  $u_n \geq u_p$ .  
En particulier, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n \geq u_0$ .
2. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante de nombres réels. Pour tout entier naturel  $p$  et tout entier naturel  $n \geq p$ , on a  $u_n \leq u_p$ .  
En particulier, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n \leq u_0$ .

**B..2 Quelques techniques pour étudier le sens de variation d'une suite**

**Technique 1.** Quand l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  ne contient qu'une seule fois la lettre  $n$ , on part de l'inégalité  $n < n + 1$  puis par opérations successives, on parvient à une inégalité entre  $u_n$  et  $u_{n+1}$

**Exemple 1.**

Étudions le sens de variation de la suite définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \quad u_n = 4 - \frac{17}{\sqrt{2^n + 1}}$$

$$\begin{aligned} n < n + 1 &\implies 2^n < 2^{n+1} \implies 2^n + 1 < 2^{n+1} + 1 \\ &\implies \sqrt{2^n + 1} < \sqrt{2^{n+1} + 1} \text{ car la fonction } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est strictement croissante sur } [0; +\infty[ \\ &\implies \frac{1}{\sqrt{2^n + 1}} > \frac{1}{\sqrt{2^{n+1} + 1}} \text{ car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est strictement décroissante sur } ]0; +\infty[ \text{ et } \sqrt{2^n + 1} > 0 \\ &\implies -\frac{17}{\sqrt{2^n + 1}} < -\frac{17}{\sqrt{2^{n+1} + 1}} \text{ car } -17 < 0 \\ &\implies 4 - \frac{17}{\sqrt{2^n + 1}} < 4 - \frac{17}{\sqrt{2^{n+1} + 1}} \\ &\implies u_n < u_{n+1} \quad \text{et donc la suite } u \text{ est strictement croissante.} \end{aligned}$$

**Technique 2.** On étudie le signe de  $u_{n+1} - u_n$  en fonction de  $n$ .

**Exemple 2.**

Étudions le sens de variation de la suite définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_n = \frac{n-1}{n+1}$$

Soit  $n$  un entier naturel,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{n+1-1}{n+1+1} - \frac{n-1}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n+1} \\ &= \frac{n(n+1) - (n-1)(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{2}{(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $\frac{2}{(n+2)(n+1)} > 0$ , donc la suite  $u$  est strictement croissante.

**Technique 3.** Si  $u_n$  est défini par des produits et des quotients et si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement positive, on compare  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  au nombre 1.

**Exemple 3.**

Étudions le sens de variation de la suite définie par :

$$\text{pour tout entier } n > 0, u_n = \frac{2^n}{n!} \text{ où } n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

Soit  $n$  un entier strictement positif,  $u_n \neq 0$  donc :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2^{n+1}}{\frac{(n+1)!}{2^n}} \\ &= \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n} \\ &= \frac{2^{n+1}}{2^n} \times \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= 2 \times \frac{1 \times 2 \times \cdots \times n}{1 \times 2 \times \cdots \times n \times (n+1)} \\ &= \frac{2}{n+1} \end{aligned}$$

Il faut maintenant comparer cette quantité avec 1 et non pas avec 0.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{2}{n+1} - 1 = \frac{2 - (n+1)}{n+1} = \frac{1-n}{n+1}. \text{ Puisque } n \geq 1, 1-n \leq 0 \text{ et puis } \frac{1-n}{n+1} \leq 0.$$

Donc,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \leq 0$  et enfin  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ .

Puisque la suite  $u$  est strictement positive, on en déduit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante. (elle l'est même strictement à partir du rang 2)

**Technique 4.** Si la suite est du type  $u_n = f(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , où  $f$  est une certaine fonction définie sur  $[0; +\infty[$ , on peut utiliser les variations de la fonction  $f$  pour préciser les variations de la suite  $(u_n)$ .

**Remarque :** Les variations de la fonction  $f$  peuvent être obtenues à partir du signe de la dérivée de la fonction  $f$  si cette fonction est dérivable. Cependant, attention ! On dérive une fonction mais

ON NE DÉRIVE PAS UNE SUITE.

#### Exemple 4.

Étudions le sens de variation de la suite définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_n = \frac{n^2 + 4n + 2}{n + 1}$$

Pour tout réel positif  $x$ , on pose  $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{x + 1}$  de sorte que  $u_n = f(n)$  pour tout entier naturel  $n$ .

La fonction  $f$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$  en tant que quotient de fonctions dérivables sur  $[0, +\infty[$  dont le dénominateur ne s'annule pas sur  $[0, +\infty[$

et pour tout réel  $x \geq 0$  on a,  $f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x + 1)^2}$ . (après calculs)

La dérivée  $f'$  est strictement positive sur  $[0, +\infty[$  et donc  $f$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ .

Donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq n < n + 1 \implies f(n) < f(n + 1) \implies u_n < u_{n+1}$ .

La suite  $u$  est donc croissante.

**Technique 5.** Si la suite est définie par récurrence, c'est-à-dire si elle est du type  $u_{n+1} = f(u_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , où  $f$  est une certaine fonction, on ne peut PAS directement utiliser les variations de la fonction  $f$  pour en déduire celles de la suite  $(u_n)$ .

Néanmoins, si la fonction  $f$  est croissante, on pourra utiliser un raisonnement par récurrence pour déterminer les variations de  $u$ . Et si  $f$  est décroissante, alors attention, la suite  $u$  ne sera pas monotone.

#### Exemple 5.

On considère la suite définie par  $u_0 = 8$  et, pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$ .

La fonction  $f$  sous-jacente est définie par  $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ .

Cette fonction affine est *croissante*, et on a  $u_{n+1} = f(u_n)$ , pour tout entier naturel  $n$ .

Montrons alors par récurrence sur  $n \geq 0$  que  $u$  est *décroissante*, c'est-à-dire que  $u_{n+1} \leq u_n$ , pour tout  $n \geq 0$ .

#### INITIALISATION

$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 2 = \frac{1}{2} \times 8 + 2 = 6.$$

Donc  $u_1 \leq u_0$ , et la propriété est initialisée.

#### INITIALISATION

Soit  $k \geq 0$  un entier naturel tel qu'on suppose que  $u_{k+1} \leq u_k$ .

Alors, la fonction étant croissante, on ne change pas le sens de l'inégalité précédente en la lui appliquant (les fonctions croissantes *conservent l'ordre*).

Donc,  $f(u_{k+1}) \leq f(u_k)$ , et donc  $u_{k+2} \leq u_{k+1}$ .

Donc la propriété est héréditaire.

#### CONCLUSION

La propriété est initialisée et héréditaire, donc par principe de récurrence, elle est vraie quelque soit  $n \geq 0$  : la suite  $u$  est décroissante.

**Remarque :** une simple modification de la valeur de  $u_0$  suffit à modifier le sens de variation de la suite  $u$ .

### B..3 Sens de variation d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique

#### Théorème 2.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r$ .

- Si  $r > 0$ , la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante.
- Si  $r < 0$ , la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante.
- Si  $r = 0$ , la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante.

**Démonstration.** Traitons seulement le premier cas, les autres se traitant de façon analogue :

Si  $r > 0$ , alors pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = r > 0$

et donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante.

#### Théorème 3.

Soit  $q$  un réel strictement positif.

- Si  $q > 1$ , la suite géométrique  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante.
- Si  $0 < q < 1$ , la suite géométrique  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante.
- Si  $q = 1$ , la suite géométrique  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante.

**Démonstration.** Traitons seulement le premier cas, les autres se traitant de façon analogue :

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $\frac{q^{n+1}}{q^n} = q$ .

Donc si  $q > 1$  alors pour tout entier naturel  $n$ ,  $\frac{q^{n+1}}{q^n} > 1$  puis  $q^{n+1} > q^n$  car  $q^n > 0$ .

On en déduit que la suite  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante.

## II. Limite d'une suite

### A. Définition de la convergence d'une suite

#### Définition 3.

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombre réels et  $l$  un nombre réel.

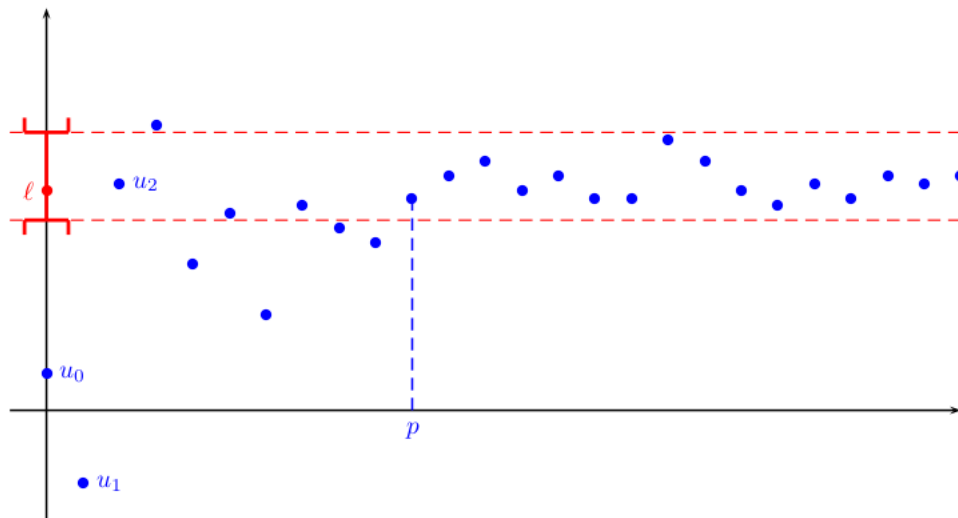
On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a pour limite  $l$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  ou aussi que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$  si et seulement si tout intervalle ouvert non vide contenant  $l$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a une limite  $l$  qui est un réel, on dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge ou que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.

Dans le cas contraire, on dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge ou que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est divergente.

**Interprétation graphique** On place  $l$  sur l'axe des ordonnées puis on se donne un intervalle ouvert  $I$  quelconque contenant  $l$ . À partir d'un certain rang  $p$  dépendant de l'intervalle  $I$  que l'on s'est donné, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle  $I$ .

Pour n'importe quel intervalle ouvert  $I$  contenant  $l$ , aussi petit soit-il, on peut fournir un tel rang  $p$ .



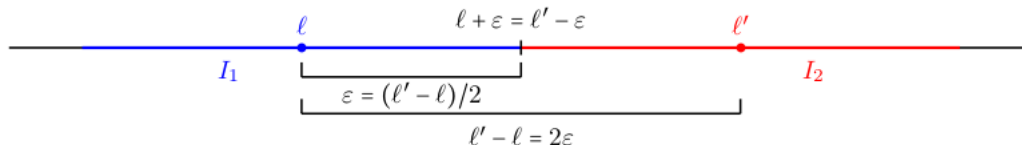
#### Théorème 4.

Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, le nombre  $l$  de la définition précédente est unique.

**Démonstration.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle convergente. Supposons que la suite  $u$  converge à la fois vers le réel  $l$  et vers le réel  $l'$ , avec  $l < l'$

Soit  $\epsilon = \frac{l' - l}{2}$ . Il s'agit d'un réel positif.

Posons  $I_1 = ]l - \epsilon; l + \epsilon[$  et  $I_2 = ]l' - \epsilon; l' + \epsilon[$ . Les intervalles  $I_1$  et  $I_2$  sont disjoints ou encore  $I_1$  et  $I_2$  n'ont aucun nombre en réel en commun.



On applique la définition 3 aux deux intervalles  $I_1$  et  $I_2$ .

Puisque la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$ , il existe un rang  $p_1$  à partir duquel tous les termes de la suite sont dans  $I_1$  et puisque la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l'$ , il existe un rang  $p_2$  à partir duquel tous les termes de la suite sont dans  $I_2$ .

Soit  $p$  le plus grand des deux rangs  $p_1$  et  $p_2$ . Alors,  $u_p$  est dans  $I_1$  et dans  $I_2$ . Ceci contredit le fait que les intervalles  $I_1$  et  $I_2$  n'ont aucun réel en commun. Il était donc absurde de supposer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergerait vers deux limites distinctes et cela démontre donc que  $l = l'$ .

**Notation.** Quand la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers le réel  $l$ , on écrit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ .

**Théorème 5.**

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombre réels et  $l$  un nombre réel.

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a pour limite  $l$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  si et seulement si tout intervalle ouvert non vide de centre  $l$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

**Démonstration.** Laissée au lecteur.

**Remarque 1.**

- C'est cette définition de limite que nous utiliserons en pratique.
- Reformulons :
  - une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$  si quelque soit le réel  $\varepsilon > 0$ , il existe un rang  $n_0$  à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle (centré en  $l$ !)  $]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$ .
  - une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$  si :  
pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que si un entier  $n$  vérifie  $n \geq n_0$  alors on a  $|u_n - l| < \varepsilon$   
(c'est une réécriture de  $-\varepsilon < u_n - l < \varepsilon$ ).

**Exemple 6.**

Montrons en revenant à la définition que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n+3} = 2$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  un réel, et notons  $I = ]2 - \varepsilon; 2 + \varepsilon[$ .

Soit  $n$  un entier naturel.

$$u_n \in I \Leftrightarrow 2 - \varepsilon < u_n < 2 + \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < u_n - 2 < \varepsilon$$

$$\text{Or, } u_n - 2 = \frac{2n+1}{n+3} - 2 = \frac{(2n+1) - 2(n+3)}{n+3} = -\frac{5}{n+3}.$$

$$\text{Ainsi, } u_n \in I \Leftrightarrow -\varepsilon < -\frac{5}{n+3} < \varepsilon.$$

Puisque  $n$  est un entier,  $-\frac{5}{n+3} < 0$  et en particulier l'inégalité  $-\frac{5}{n+3} < \varepsilon$  est vraie. Il reste :

$$\begin{aligned} u_n \in I &\Leftrightarrow -\varepsilon < -\frac{5}{n+3} \\ &\Leftrightarrow \varepsilon > \frac{5}{n+3} \\ &\Leftrightarrow n+3 > \frac{5}{\varepsilon} \text{ car } \varepsilon > 0 \\ &\Leftrightarrow n > \frac{5}{\varepsilon} - 3 \\ &\Leftrightarrow n \geq E\left(\frac{5}{\varepsilon} - 3\right) + 1 \end{aligned}$$

Donc, en posant  $n_0 = E\left(\frac{5}{\varepsilon} - 3\right) + 1$ , on a que  $n \geq n_0 \implies u_n \in I$ .

Et donc,  $\varepsilon$  étant quelconque, cela démontre que la suite  $u$  converge vers 2.

## B. Suites de limite infinie

### Définition 4.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombre réels.

- On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a pour limite  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  si et seulement si tout intervalle ouvert de la forme  $]A; +\infty[$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.  
De façon équivalente, on dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a pour limite  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  si pour tout réel  $M > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  on a  $u_n > M$ .
- On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a pour limite  $-\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  si et seulement si tout intervalle ouvert de la forme  $] -\infty; B[$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.  
De façon équivalente, on dit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a pour limite  $-\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  si pour tout réel  $m < 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  on a  $u_n < m$ .

**Notation.** Quand  $u_n$  a pour limite  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on écrit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

Quand  $u_n$  a pour limite  $-\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on écrit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

### Remarque 2.

Une suite tendant vers  $+\infty$  ou vers  $-\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  est une suite divergente.

### Exemple 7.

Montrons que la suite définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_n = n^2 + 3n + 2$$

tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

On note d'abord que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = n + n^2 + 2n + 2$  et donc  $u_n \geq n$ .

Soient alors  $A$  un réel puis  $I = ]A; +\infty[$ . Soit  $p$  un entier strictement plus grand que  $A$  (on peut prendre par exemple  $p = 0$  si  $A < 0$  et  $p = E(A) + 1$  si  $A \geq 0$  (où  $E$  désigne la fonction « partie entière »)).

Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à  $p$ , on a  $u_n \geq n \geq p > A$  et donc  $u_n \in I$ .

On a donc montré que tout intervalle de la forme  $]A; +\infty[$  contient tous les termes de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à partir d'un certain rang et donc que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

## C. Limites des suites de référence

### Théorème 6.

$$\begin{array}{lll} \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty & \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty & \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \\ \text{Pour tout } k \geq 1, & \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \end{array}$$

Nous allons maintenant étudier la limite d'une suite géométrique (théorème 9). Pour démontrer ce théorème, on a besoin d'un résultat préliminaire qui est l'objet du théorème 8.

### Théorème 7.

Pour tout réel positif  $a$  et tout entier naturel  $n$ ,

$$(1 + a)^n \geq 1 + na \quad (\text{inégalité de BERNOULLI})$$

### Théorème 8.

Soit  $q$  un réel.

- Si  $q > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ .

- Si  $q = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$ .
- Si  $-1 < q < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ .
- Si  $q \leq -1$ ,  $q^n$  n'a pas de limite, ni réelle, ni infinie.

**Démonstration.** L'inégalité de Bernoulli ainsi que le cas  $q > 1$  ont été démontrés en exercice.

Traisons ici le cas  $0 < q < 1$  : On a alors  $\frac{1}{q} > 1$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n = +\infty$

ou encore  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{q^n} = +\infty$ .

D'après le théorème 11, on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1/q^n} = 0$ .

## D. Opérations sur les limites

### D..1 Somme de deux suites

On admettra le théorème suivant dont les résultats sont très intuitifs.

**Théorème 9** (limite d'une somme de deux suites).

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de nombres réels.

1. Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $l$  et si la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $l'$ , alors la suite  $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = l + l'$ .
2. Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $l$  et si la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$  (respectivement  $-\infty$ ) quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , alors la suite  $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$  (respectivement  $-\infty$ ) quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
3. Si les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendent toutes les deux vers  $+\infty$  (respectivement  $-\infty$ ) quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , alors la suite  $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$  (respectivement  $-\infty$ ) quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
4. Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$  et la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $-\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on ne peut pas conclure car tout est possible pour la suite  $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

On résume ces différents résultats dans un tableau.

|                             |          |           |           |           |           |           |
|-----------------------------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $(u_n)$ a pour limite       | $l$      | $l$       | $l$       | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $(v_n)$ a pour limite       | $l'$     | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $(u_n + v_n)$ a pour limite | $l + l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | ?         |

Le tableau ci-dessus comporte un ? . Quand la suite  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$  et que la suite  $(v_n)$  tend vers  $-\infty$ , tout est possible et on ne peut donc pas donner de résultat général.

Voici quatre exemples montrant que l'on peut vraiment obtenir n'importe quel résultat pour la suite  $(u_n + v_n)$ .

Dans chacun des quatre cas ci-dessous, la suite  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$  et la suite  $(v_n)$  tend vers  $-\infty$ .

- $u_n = n^2 + n$ ,  $v_n = -n^2$ ,  $u_n + v_n = n$ . Dans ce cas, la suite  $(u_n + v_n)$  tend vers  $+\infty$ .
- $u_n = n^2 - n$ ,  $v_n = -n^2$ ,  $u_n + v_n = -n$ . Dans ce cas, la suite  $(u_n + v_n)$  tend vers  $-\infty$ .
- $u_n = n^2 + 1$ ,  $v_n = -n^2$ ,  $u_n + v_n = 1$ . Dans ce cas, la suite  $(u_n + v_n)$  tend vers 1.
- $u_n = n^2 + (-1)^n$ ,  $v_n = -n^2$ ,  $u_n + v_n = (-1)^n$ . Dans ce cas, la suite  $(u_n + v_n)$  n'a pas de limite.

### D..2 Produit de deux suites

**Théorème 10** (limite d'un produit de deux suites).

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de nombres réels.

1. Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $l$  et si la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $l'$ , alors la suite  $(u_n \times v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = l \times l'$ .

2. (a) Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $l > 0$  et si la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ), alors la suite  $(u_n \times v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ).
- (b) Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $l < 0$  et si la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ), alors la suite  $(u_n \times v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $-\infty$  (resp.  $+\infty$ ).
3. (a) Si les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendent toutes les deux vers  $+\infty$  ou toutes les deux vers  $-\infty$ , la suite  $(u_n \times v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$ .
- (b) Si l'une des deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$  l'autre tend vers  $-\infty$ , alors la suite  $(u_n \times v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $-\infty$ .
4. Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0 et la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $\pm\infty$ , on ne peut pas conclure car tout est possible pour la suite  $(u_n \times v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

On résume ces différents résultats dans un tableau.

|                                  |               |           |           |           |           |           |           |           |             |
|----------------------------------|---------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------------|
| $(u_n)$ a pour limite            | $l$           | $l > 0$   | $l > 0$   | $l < 0$   | $l < 0$   | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | 0           |
| $(v_n)$ a pour limite            | $l'$          | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $\pm\infty$ |
| $(u_n \times v_n)$ a pour limite | $l \times l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | ?           |

### Remarque 3.

Le cas particulier où l'une des deux suites est une suite constante et non nulle fournit les différents résultats pour la suite  $(ku_n)$  où  $k$  est un réel non nul.

Encore une fois, le tableau comporte un ?. Voici quatre exemples où la suite  $(u_n)$  tend vers 0 et la suite  $(v_n)$  tend vers  $\pm\infty$  avec à chaque fois un résultat différent concernant la suite  $(u_n \times v_n)$

- $u_n = \frac{1}{n}$ ,  $v_n = n^2$ ,  $u_n \times v_n = n$ . Dans ce cas, la suite  $(u_n \times v_n)$  tend vers  $+\infty$ .
- $u_n = \frac{1}{n^2}$ ,  $v_n = n$ ,  $u_n \times v_n = \frac{1}{n}$ . Dans ce cas, la suite  $(u_n \times v_n)$  tend vers 0.
- $u_n = \frac{1}{n}$ ,  $v_n = n$ ,  $u_n \times v_n = 1$ . Dans ce cas, la suite  $(u_n \times v_n)$  tend vers 1.
- $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ,  $v_n = n$ ,  $u_n \times v_n = (-1)^n$ . Dans ce cas, la suite  $(u_n \times v_n)$  n'a pas de limite.

### D..3 Quotient de deux suites

**Théorème 11** (limite d'un quotient de deux suites).

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de nombres réels telles que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

1. Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $l$  et si la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $l' \neq 0$ , alors la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{l}{l'}$ .
2. Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $l$  et si la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $\pm\infty$ , la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0.
3. (a) Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$  (respectivement  $-\infty$ ) et si la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers un réel  $l' > 0$  (respectivement  $l' < 0$ ), la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$ .
- (b) Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$  (respectivement  $-\infty$ ) et si la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers un réel  $l' < 0$  (respectivement  $l' > 0$ ), la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $-\infty$ .
4. (a) Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers un réel  $l > 0$  ou vers  $+\infty$  (respectivement vers un réel  $l < 0$  ou vers  $-\infty$ ) et si la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement positive (respectivement strictement négative) à partir d'un certain rang et tend vers 0, la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = +\infty$ .

(b) Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers un réel  $l > 0$  ou vers  $+\infty$  (respectivement vers un réel  $l < 0$  ou vers  $-\infty$ ) et si la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement négative (respectivement strictement positive) à partir d'un certain rang et tend vers 0, la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = -\infty$ .

5. Si les deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendent toutes les deux vers 0 ou toutes les deux vers  $\pm\infty$ , on ne peut pas conclure car tout est possible pour la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

On résume ces différents résultats dans un tableau.

|                                                                 |                |             |           |           |           |           |             |                            |                            |                            |                            |   |
|-----------------------------------------------------------------|----------------|-------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---|
| $(u_n)$ a pour limite                                           | $l$            | $l$         | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $\pm\infty$ | $l > 0$<br>ou<br>$+\infty$ | $l < 0$<br>ou<br>$-\infty$ | $l > 0$<br>ou<br>$+\infty$ | $l < 0$<br>ou<br>$-\infty$ | 0 |
| $(v_n)$ a pour limite                                           | $l' \neq 0$    | $\pm\infty$ | $l' > 0$  | $l' < 0$  | $l' > 0$  | $l' < 0$  | $\pm\infty$ | 0 en étant $> 0$           | 0 en étant $> 0$           | 0 en étant $< 0$           | 0 en étant $< 0$           | 0 |
| $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite | $\frac{l}{l'}$ | 0           | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ?           | $+\infty$                  | $-\infty$                  | $-\infty$                  | $+\infty$                  | ? |

#### Remarque 4.

En particulier, l'inverse d'une suite tendant vers l'infini est une suite tendant vers 0 et l'inverse d'une suite strictement positive ou strictement négative tendant vers 0 est une suite tendant vers l'infini (+ ou -).

On résume ces résultats avec les deux égalités

$$\frac{1}{0} = \infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{\infty} = 0.$$

L'écriture  $\frac{1}{0}$  ne signifie pas que l'on a divisé le nombre 1 par le nombre 0 mais que l'on a divisé une suite tendant vers 1 par une suite tendant vers 0. De même, l'écriture  $\frac{1}{\infty}$  ne signifie pas que l'on a divisé le nombre 1 par l'infini (qui n'est pas un nombre) mais que l'on a divisé une suite tendant vers 1 par une suite tendant vers l'infini.

Cette fois-ci, le tableau comporte deux ?. Voici trois exemples où les deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendent vers 0 avec à chaque fois un résultat différent concernant  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

- $u_n = \frac{1}{n}$ ,  $v_n = \frac{1}{n^2}$ ,  $\frac{u_n}{v_n} = n$ . Dans ce cas, la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  tend vers  $+\infty$ .
- $u_n = \frac{1}{n^2}$ ,  $v_n = \frac{1}{n}$ ,  $\frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{n}$ . Dans ce cas, la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  tend vers 0.
- $u_n = \frac{1}{n}$ ,  $v_n = \frac{1}{n}$ ,  $\frac{u_n}{v_n} = 1$ . Dans ce cas, la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  tend vers 1.

Voici trois autres exemples où les deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendent vers  $+\infty$  avec à chaque fois un résultat différent concernant  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

- $u_n = n^2$ ,  $v_n = n$ ,  $\frac{u_n}{v_n} = n$ . Dans ce cas, la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  tend vers  $+\infty$ .
- $u_n = n$ ,  $v_n = n^2$ ,  $\frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{n}$ . Dans ce cas, la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  tend vers 0.
- $u_n = n$ ,  $v_n = n$ ,  $\frac{u_n}{v_n} = 1$ . Dans ce cas, la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  tend vers 1.

## D.4 Les quatre formes indéterminées

Dans les théorèmes précédents, nous avons rencontré quatre situations où le résultat était imprévisible. Ces quatre situations sont les quatre **formes indéterminées** de la classe de terminale. L'une d'entre elles est à part : c'est la forme  $-\infty + \infty$ . Les trois autres vont ensemble car il s'agit en fait de la même forme indéterminée : ce sont les formes  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\frac{0}{0}$  et  $0 \times \infty$ . Il s'agit bien d'une seule et même indétermination en tenant compte des deux « égalités » :  $\frac{1}{0} = \infty$  et  $\frac{1}{\infty} = 0$ .

| Les quatres formes indéterminées |                         |               |                   |
|----------------------------------|-------------------------|---------------|-------------------|
| $+\infty - \infty$               | $\frac{\infty}{\infty}$ | $\frac{0}{0}$ | $0 \times \infty$ |

Quand on n'est en présence d'une telle forme indéterminée, les théorèmes 9, 10 et 11 affirment que l'on ne peut pas conclure avec cette écriture de la suite. Ceci ne signifie pas que tout s'arrête et que l'on ne sait pas faire l'exercice. Cela signifie que l'on doit chercher une autre écriture de la suite sous laquelle l'indétermination disparaît. La principale technique est :

**on met le terme prépondérant en facteur.**

Par exemple, pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $u_n = 2n^2 - 3n + 5$ .  $2n^2$  tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et  $-3n + 5$  tend vers  $-\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Nous sommes donc face à une forme indéterminée. Il n'est pas nécessaire de le constater sur une copie. En présence d'une forme indéterminée, la première chose à ne pas faire est d'écrire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$  car on ne sait même pas si cette limite existe. On transforme d'abord l'écriture de  $u_n$  en mettant le terme prépondérant  $2n^2$  en facteurs sans écrire le symbole  $\lim_{n \rightarrow +\infty}$  : pour tout entier naturel **non nul**  $n$ ,

$$u_n = 2n^2 - 3n + 5 = 2n^2 \left( \frac{2n^2}{2n^2} - \frac{3n}{2n^2} + \frac{5}{2n^2} \right) = 2n^2 \left( 1 - \frac{3}{2n} + \frac{5}{2n^2} \right).$$

Dans la parenthèse est apparue une somme dont le premier terme est 1. Les autres termes tendent vers 0 car ils sont le résultat de la division d'un terme par un terme prépondérant. La parenthèse tend donc vers 1 et il n'y a plus qu'à donner la limite du terme prépondérant mis en facteur. L'indétermination a été levée et on peut maintenant utiliser le symbole  $\lim_{n \rightarrow +\infty}$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{3}{2n} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{2n^2} = 0. \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{2n} + \frac{5}{2n^2} = 1.$$

D'autre part,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^2 = +\infty$ . En effectuant le produit des deux suites, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^2 \left( 1 - \frac{3}{2n} + \frac{5}{2n^2} \right) = +\infty$$

## E. Limites et inégalités

### E.1 Limites finies et inégalités

On admettra le théorème suivant :

#### **Théorème 12.**

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de nombres réels.

On suppose que :

- il existe un rang  $p$  tel que pour tout entier naturel  $n \geq p$ ,  $u_n \leq v_n$
- la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $l$
- la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $l'$

Alors  $l \leq l'$ .

## E..2 Limites infinies et inégalités

### Théorème 13.

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de nombres réels.

On suppose que :

1. Si pour tout entier naturel  $n$  à partir d'un certain rang, on a  $u_n \leq v_n$  et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .
2. Si pour tout entier naturel  $n$  à partir d'un certain rang, on a  $u_n \leq v_n$  et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

**Démonstration.** Montrons 1.

Par hypothèse, il existe un rang  $p_1$  tel que pour tout  $n \geq p_1$ , on a  $v_n \geq u_n$ .

Soit  $M$  un réel. Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , il existe un rang  $p_2$  tel que pour tout  $n \geq p_2$ , on a  $u_n > M$ .

Soit  $p$  le plus grand des deux entiers  $p_1$  et  $p_2$ .

Pour tout  $n \geq p$ ,  $v_n \geq u_n$  et  $u_n > M$ . Donc, pour tout  $n \geq p$ , on a  $v_n > M$ .

Cela démontre que la suite  $v$  tend vers l'infini :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

Le 2. se montre de manière analogue.

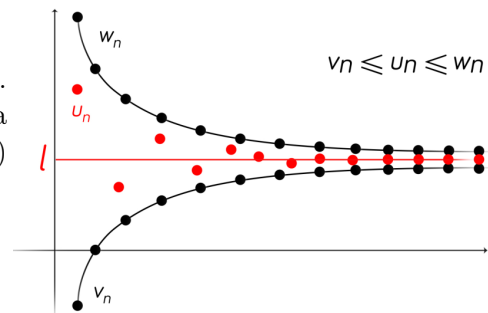
## E..3 Théorème des gendarmes

**Théorème 14** (théorème des gendarmes).

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  trois suites de nombres réels.

Si pour tout entier naturel  $n$  à partir d'un certain rang, on a  $v_n \leq u_n \leq w_n$  et si les suites  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (les gendarmes) convergent et ont même limite  $l$ ,

alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ .



**Démonstration.** Il existe un rang  $p_1$  tel que pour tout  $n \geq p_1$ ,  $v_n \leq u_n \leq w_n$ .

Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif puis  $I = ]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$ .

Puisque la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$ , il existe un rang  $p_2$  tel que pour tout  $n \geq p_2$ ,  $l - \varepsilon < v_n$  et puisque la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$ , il existe un rang  $p_3$  tel que pour tout  $n \geq p_3$ ,  $w_n < l + \varepsilon$ .

Soit  $p$  le plus grand des trois entiers  $p_1, p_2$  et  $p_3$ . Pour tout entier naturel  $n \geq p$ , on a :

$$l - \varepsilon < v_n \leq u_n \leq w_n < l + \varepsilon$$

et en particulier, pour tout entier naturel  $n \geq p$ ,  $l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$  ou encore  $u_n$  appartient à  $I$  (ou encore,  $|u_n - l| < \varepsilon$ ).

Tous les termes de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont dans l'intervalle  $I$  à partir d'un certain rang.

On a montré que tout intervalle ouvert de centre  $l$  contient tous les termes de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à partir d'un certain rang. On en déduit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ .

### Exemple 8.

Soit une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant :

$$\text{pour tout } n \geq 4, \quad 1 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n}.$$

Alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ .

## E.4 Convergence des suites monotones

On admettra le théorème suivant :

### Théorème 15.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels.

Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante à partir d'un certain rang et si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante à partir d'un certain rang et si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

### Commentaire.

Le théorème précédent ne donne pas la valeur de la limite de  $u_n$ . Il dit simplement que cette limite existe.

### Exemple 9.

Voir la fiche d'exercices.

### Théorème 16.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels croissante et majorée. Soit  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

Alors, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq l$ .

**Démonstration.** Puisque la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et majorée, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

Soit  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

Supposons par l'absurde qu'il existe un rang  $p$  tel que  $u_p > l$ . Puisque la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante, pour tout entier naturel  $n \geq p$ ,  $u_n \geq u_p$ .

**Variante 1.** On fait tendre  $n$  vers  $+\infty$  dans cette inégalité : d'après le théorème 13, on a  $l \geq u_p$ . Ceci contredit le fait que  $u_p > l$ . Il était donc absurde de supposer qu'il existe un rang  $p$  tel que  $u_p > l$  et on a montré que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq l$ .

**Variante 2.** Considérons l'intervalle  $I = ]l - 1; u_p[$ .

$l - 1 < l < u_p$ ,  $I$  est un intervalle ouvert contenant  $l$ .

On sait que pour tout  $n \geq p$ ,  $u_n \geq u_p$  et en particulier, pour tout  $n \geq p$ ,  $u_n$  n'appartient pas à  $I$ .

$I$  est donc un intervalle ouvert contenant  $l$  et ne contenant pas tous les termes de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à partir d'un certain rang. Ceci contredit le fait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ . Il était donc absurde de supposer qu'il existe un rang  $p$  tel que  $u_p > l$  et on a montré que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq l$ .

### Théorème 17.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels croissante et non majorée.

Alors,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

**Démonstration.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels croissante et non majorée.

Soit  $A$  un réel puis  $I = ]A; +\infty[$ . Puisque la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas majorée, le nombre  $A$  n'est pas un majorant de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Il existe donc au moins un entier naturel  $p$  tel que  $u_p > A$ .

Puisque la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante, pour tout entier naturel  $n \geq p$ , on a  $u_n \geq u_p$  et donc  $u_n > A$ .

Ainsi, il existe un rang  $p$  tel que pour tout  $n \geq p$ ,  $u_n \in I$ .

On a montré que tout intervalle de la forme  $]A; +\infty[$ , où  $A$  est un réel, contient tous les termes de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à partir d'un certain rang et donc que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Donc,  $u$  diverge vers  $+\infty$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

## F. Des candidats à la limite

**Théorème 18** (du point fixe - admis).

Soit  $f$  une fonction **continue** d'un intervalle  $I$  dans lui-même.

Supposons que la suite  $(u_n)$  est définie par la relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

Si  $u$  converge, alors sa limite  $l$  vérifie la relation :

$$f(l) = l.$$

**Remarque 5.**

En pratique :

- On montre que  $u$  converge vers un réel  $l$ , par exemple en montrant qu'elle est croissante majorée ;
- On cherche à résoudre l'équation  $f(x) = x$  pour trouver **les éventuelles limites**. Si deux limites existent, un raisonnement simple permet souvent d'en éliminer une.

**Exemple 10** (exo 41, fiche).

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Donnons des valeurs approchées à  $10^{-3}$  près des premiers termes :  
 $u_1 = \sqrt{2u_0 + 3} = \sqrt{5} \approx 2,236$ ,  $u_2 = \sqrt{2u_1 + 3} \approx 2,734$  et  $u_3 \approx 2,910$ .
2. Démontrons par récurrence sur  $n \geq 0$  que  $\mathcal{P}_n : \ll 0 \leq u_n \leq 3 \gg$  est vraie.

**Initialisation**

$u_0 = 1$  et  $0 \leq 1 \leq 3$ , donc  $\mathcal{P}_0$  est vraie.

**Hérédité**

Soit  $k \geq 0$ .

$$\begin{aligned} 0 \leq u_k \leq 3 &\Rightarrow 0 \leq 2u_k \leq 6 \quad \text{car } 2 > 0 \\ &\Rightarrow 3 \leq 2u_k + 3 \leq 9 \\ &\Rightarrow \sqrt{3} \leq \sqrt{2u_k + 3} \leq \sqrt{9} \quad \text{car la fonction racine carrée est croissante sur } [0 ; +\infty[ \\ &\Rightarrow 0 \leq \sqrt{3} \leq u_{k+1} \leq 3 \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{P}_k \Rightarrow \mathcal{P}_{k+1}$ , et par principe de récurrence,  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \geq 0$ .

3. Démontrons par récurrence sur  $n \geq 0$  que la suite  $(u_n)$  est croissante, c'est à dire que  $\mathcal{Q}_n : \ll u_{n+1} \geq u_n \gg$  est vraie.

**Initialisation**

$u_0 = 1$  et  $u_1 \approx 2,236$ , donc  $u_1 \geq u_0$  et  $\mathcal{Q}_0$  est vraie.

**Hérédité**

Soit  $k \geq 0$  tel que  $u_{k+1} \geq u_k$ .

$$\begin{aligned} u_{k+1} \geq u_k &\Rightarrow 2u_{k+1} + 3 \geq 2u_k + 3 \quad \text{car } 2 > 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{2u_{k+1} + 3} \geq \sqrt{2u_k + 3} \quad \text{car la fonction racine carrée est croissante sur } [0 ; +\infty[ \\ &\Rightarrow u_{k+2} \geq u_{k+1} \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{Q}_k \Rightarrow \mathcal{Q}_{k+1}$ , et par principe de récurrence,  $\mathcal{Q}_n$  est vraie pour tout  $n \geq 0$ .

4. La suite  $u$  est donc croissante, et majorée par 3, donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel  $l \leq 3$ .

On peut préciser les éventuelles valeurs que  $l$  peut prendre.

En effet,  $u$  est définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$  où la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{2x + 3}$  est **continue** sur  $[0 ; +\infty[$ .

On peut donc affirmer que  $l$  est solution de l'équation  $f(x) = x$ .

Or,  $f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{2x + 3} = x \Rightarrow 2x + 3 = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ .

Un calcul de discriminant permet de conclure que  $l = -1$  ou  $l = 3$  (ce sont les limites éventuelles de la suite  $u$ ). Or, on a montré que  $u$  est minorée par 0, donc nécessairement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3.$$