

CHAPITRE 7 - REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES DES DROITES



Homme du « Cogito ergo sum », RENÉ DESCARTES naît le 31 mars 1596 dans le village de la Haye en Touraine (qui porte maintenant le nom de Descartes), d'une famille de moyenne bourgeoisie (son père est conseiller au Parlement de Bretagne). Il ne connaîtra jamais sa mère, décédée des suites de son accouchement. Lui-même sera handicapé toute sa vie par une santé fragile qui le conduira notamment à ne jamais se lever avant 11 heures du matin ! Après une éducation stricte et solide au collège des jésuites de la Flèche, il poursuit des études de droit à la faculté de Poitiers. Il s'engage ensuite, comme nombre de ses jeunes contemporains, dans une armée européenne, pour lui l'armée bavaroise. Mais Descartes n'aura jamais à combattre, et profitera essentiellement de cet engagement pour voyager à travers l'Europe.

En 1628 Descartes pose ses valises en Hollande, à l'écart des mondanités parisiennes. En 1633, il est prêt à publier *Le Monde*, ouvrage qui décrit les structures physiques qui nous régissent. Il y défend notamment le fait que la terre tourne sur elle-même et autour du soleil, suivant en cela COPERNIC et GALILÉE. Mais ce dernier vient d'être condamné par l'Inquisition, et Descartes préfère être prudent. Son œuvre la plus célèbre est *Discours de la méthode* pour conduire correctement la Raison et chercher la vérité dans les Sciences, qu'il publie en 1637 en français (alors que l'essentiel des ouvrages scientifiques ou philosophiques était alors encore rédigé en latin). Il s'y appuie sur les mathématiques, qui sont pour lui la seule chose certaine. Le *Discours* est accompagné de 3 essais, comme autant d'illustrations de la méthode : Dioptrique (optique géométrique et lois de la réfraction) - Météores (météorologie) - Géométrie. Ce dernier est de très loin le plus important des 3 essais : il y explique comment relier la géométrie et le calcul, et crée la géométrie analytique.

À intervalles plus ou moins réguliers, il publiera d'autres ouvrages, dont les *Principes de la philosophie* en 1644. Comme la plupart des savants de son époque, il sera l'objet de contestations et de querelles de priorité, mais pourra toujours compter sur l'appui de son ami MERSENNE à Paris. En septembre 1649, il répond à l'invitation de la reine Christine de Suède, qui souhaite apprendre la philosophie. Dans le froid de l'hiver scandinave, Descartes contracte une pneumonie. Il tombe malade, et décède le 11 février 1650.

I. Vecteurs de l'espace - RAPPELS

A. Définition d'un vecteur de l'espace

Propriété 1.

On étend à l'espace la notion de vecteur du plan. Soient A et B deux points de l'espace.

Au couple (A ; B), on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de la **translation** qui transforme A en B.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si ABCD est un parallélogramme (éventuellement aplati).

On peut alors noter $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des **représentants** du vecteur $\vec{u}$.

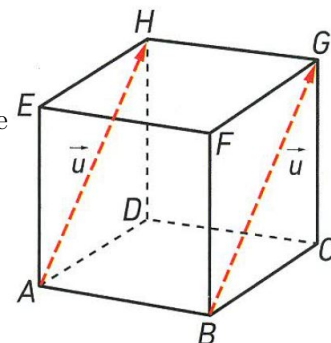
Remarque 1.

Lorsque les points A et B sont confondus, on dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est nul, et on note $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Exemple 1.

Dans le cube ci-contre, la translation qui transforme A en H, transforme B en G.

On a alors $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG} = \vec{u}$.



B. Opération sur les vecteurs de l'espace

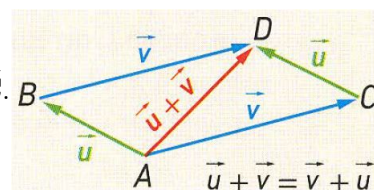
Théorème 1.

Soit $\vec{u}$ un vecteur et A un point de l'espace. Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

Propriété 2 (Règle du parallélogramme).

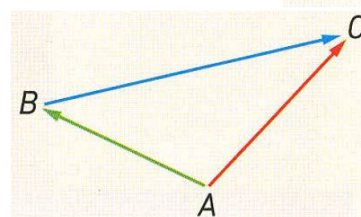
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace de représentants respectifs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

- La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} + \vec{v}$ de représentant $\overrightarrow{AD}$.
- $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow ABCD$ est un parallélogramme.



Propriété 3 (Relation de Chasles).

Pour tous points A, B et C de l'espace, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Remarque 2.

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
 $\overrightarrow{BA}$ est le vecteur opposé de $\overrightarrow{AB}$. On note $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.
 Et on note $-\vec{u}$ le vecteur opposé de $\vec{u}$.
- Toutes les opérations sur les vecteurs du plan se prolongent aux vecteurs de l'espace.

Propriété 4.

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ un vecteur de l'espace. Soit k un nombre réel.

Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur défini par un représentant $\overrightarrow{AC}$ tel que :

- C appartient à la demi-droite d'origine A contenant B et $AC = kAB$ lorsque $k > 0$.
- C appartient à la demi-droite d'origine A et ne contenant pas B et $AC = -kAB$ lorsque $k < 0$.



Remarque 3.

Comme dans le plan, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont dits colinéaires.
Les propriétés des vecteurs colinéaires du plan se prolongent aux vecteurs de l'espace.

Propriété 5.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Soient k et k' deux réels.

- $k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$;
- $k(k'\vec{u}) = kk'\vec{u}$;
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$;
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.

II. Représentations paramétriques

A. Caractérisation vectorielle d'une droite

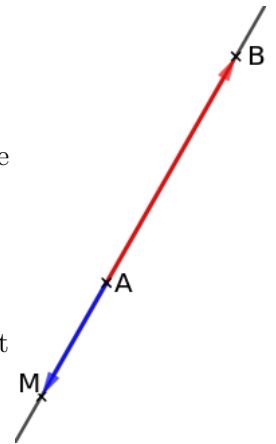
Propriété 6.

Soient A et B deux points distincts de l'espace.

Un point M appartient à la droite (AB) si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

Remarque 4.

- Comme dans le plan, $\overrightarrow{AB}$ s'appelle $\vec{u}$ vecteur directeur de la droite (AB).
- Un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$ déterminent la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.



Propriété 7.

Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathcal{D}'$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}'$.

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.

B. Représentation paramétrique d'une droite

Propriété 8.

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère un point $A(x_A; y_A; z_A)$, un vecteur non nul $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
Pour tout point $M(x; y; z)$ de l'espace :

$$M \in d \Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} x &= x_A + at \\ y &= y_A + bt \\ z &= z_A + ct \end{cases}$$

Ce système s'appelle une **représentation paramétrique de la droite** d .

Démonstration.

$M \in d \Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} x - x_A = at \\ y - y_A = bt \\ z - z_A = ct \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

Remarque 5.

Une droite admet une infinité de représentations paramétriques.

Propriété 9.

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace. Soient $\alpha, \beta, \gamma, a, b$ et c six réels tels que $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$.

L'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant $\begin{cases} x = \alpha + at \\ y = \beta + bt \\ z = \gamma + ct \end{cases}$ où t décrit $\mathbb{R}$

est la droite d passant par le point $A(\alpha; \beta; \gamma)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$\textbf{Démonstration.} \quad \begin{cases} x = \alpha + at \\ y = \beta + bt, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = \gamma + ct \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \alpha = at \\ y - \beta = bt, \quad t \in \mathbb{R} \\ z - \gamma = ct \end{cases}$$

Si on considère le point $A(\alpha; \beta; \gamma)$ et le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, ce système est équivalent à $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}$.

Donc l'ensemble des points $M(\alpha + at; \beta + bt; \gamma + ct)$ est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.