

CHAPITRE 8 - LIMITES DE FONCTIONS



Le concept de l'infini intéresse les scientifiques et les philosophes depuis l'Antiquité.

Au V^{ème} siècle av. J.-C., les paradoxes de ZÉNON D'ÉLÉE renvoient à la composition du continu à partir d'éléments indivisibles ou à la divisibilité à l'infini d'un segment. Au IV^{ème} siècle av. J.-C. selon ARISTOTE (Livre III de la *Physique*), l'infini est « ce qui ne se laisse pas parcourir et n'a pas de limites ». N'ayant pas de limites, il n'est pas déterminé et donc il n'existe pas en soi. Dès le III^{ème} siècle av. J.-C., ARCHIMÈDE construit une théorie mathématique dans laquelle la notion d'infini est présente.

Plus tard, au XVIII^{ème} siècle, ISAAC NEWTON, physicien et mathématicien anglais (1642-1727), et GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ, philosophe et mathématicien allemand (1646-1716), posent les bases du calcul différentiel.

Au XIX^{ème} siècle, BERNARD BOLZANO, logicien et mathématicien tchèque, est le premier à tenter de construire un calcul purement mathématique et un calcul systématique de l'infini actuel. GEORG CANTOR, mathématicien allemand (1845-1918), définit l'égalité de deux ensembles infinis et affirme qu'il y a, après le fini, « une échelle illimitée de modes déterminés qui par nature ne sont pas finis mais infinis ».

On doit à Bolzano (représenté ci-dessus) la démonstration originale du théorème des valeurs intermédiaires.

I. Limite en $+\infty$ et en $-\infty$

A. Limite infinie

Définition 1.

- Une fonction f **a pour limite $+\infty$ en $+\infty$** si tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

Reformulons : f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si, quelque soit le réel A , il existe un réel x_0 (dépendant de A) tel que si $x > x_0$ alors $f(x) > A$.

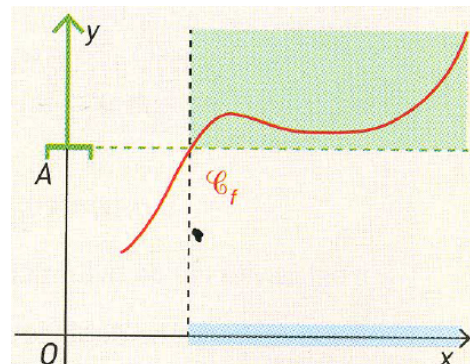
On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- Une fonction f **a pour limite $-\infty$ en $+\infty$** si tout intervalle ouvert de la forme $] -\infty; A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

Reformulons : f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si, quelque soit le réel A , il existe un réel x_0 (dépendant de A) tel que si $x > x_0$ alors $f(x) < A$.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

- On définit de façon analogue les limites en $-\infty$.



Exemple 1.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $A > 0$ un réel quelconque.

Il suffit de choisir $x_0 = \sqrt{A}$ pour s'assurer que, si $x > x_0$, on aura $x^2 > A$.

De plus, lorsque $A < 0$, il est clair que $x^2 \geq 0 > A$ quelque soit le réel x (donc on peut choisir n'importe quel valeur pour x_0).

Cela prouve que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.

Propriété 1.

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$
- Si n est pair, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$.
- Si n est impair, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$.

B. Limite finie

Définition 2.

Soit l un réel.

- Une fonction f **a pour limite l en $+\infty$** lorsque tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

Reformulons : f a pour limite l en $+\infty$ si, quelque soit le réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel x_0 (dépendant de ε) tel que si $x \geq x_0$, alors on a $-\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon$ ou, dit autrement, $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.

(L'intervalle ouvert en question, contenant l , est donc $]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$)

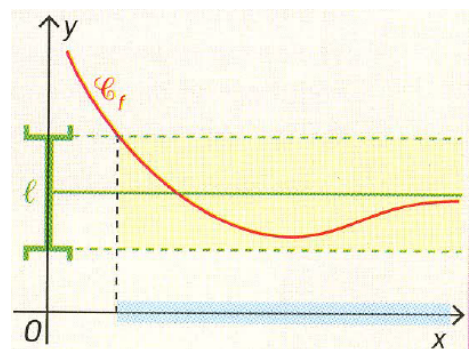
On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

- Une fonction f **a pour limite l en $-\infty$** lorsque tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez petit.

Reformulons : f a pour limite l en $-\infty$ si, quelque soit le réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel x_0 (dépendant de ε) tel que si $x \leq x_0$, alors on a $-\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon$ ou, dit autrement, $|f(x) - l| < \varepsilon$

(je l'écris volontairement différemment, mais cela veut strictement dire la même chose).

On note $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$.



Interprétation graphique

Quand x devient grand, la courbe représentative de la fonction f se rapproche de la droite d'équation $y = l$.

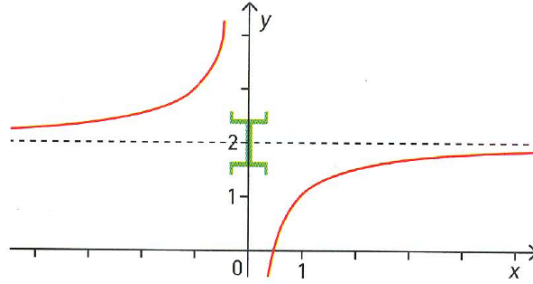
Exemple 2.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$.

Soit I un intervalle ouvert, quelconque, contenant 2.

Pour x suffisamment grand, $\frac{1}{x}$ sera suffisamment petit pour que les valeurs de $f(x)$ soient assez proche de 2 et donc appartiennent à I .

Il s'agit d'une intuition du fait que la fonction f a pour limite 2 en $+\infty$.



Pour le démontrer proprement : soit $\varepsilon > 0$ un réel.

$f(x) - 2 = -\frac{1}{x}$, donc $|f(x) - 2| = \frac{1}{x}$, et il suffit donc de choisir $x_0 = \frac{1}{\varepsilon}$ pour s'assurer que :

Si $x \geq x_0 = \frac{1}{\varepsilon}$, alors on aura $|f(x) - 2| = \frac{1}{x} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} \leq \varepsilon$.

Il suffit donc de choisir $x_0 = \frac{1}{\varepsilon}$ pour s'assurer que, si $x > x_0$, on aura $|f(x) - 2| < \varepsilon$.

(ou, dit autrement, $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$, ou encore $f(x) \in]2 - \varepsilon; 2 + \varepsilon[= I$)

Cela prouve que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

Définition 3.

- Si une fonction f a pour limite un réel l en $+\infty$, on dit que sa courbe représentative admet pour **asymptote horizontale** la droite d'équation $y = l$ en $+\infty$.
- On définit de la même façon une asymptote horizontale en $-\infty$.

Propriété 2.

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

II. Limite infinie en un réel a

A. Limite infinie en un réel a

Définition 4.

Soit a un réel.

- Une fonction f a **pour limite** $+\infty$ **en** a si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a .

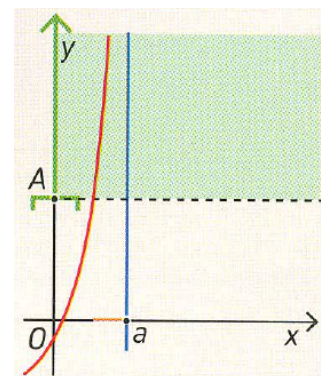
Reformulons : f a pour limite $+\infty$ en a si, quelque soit le réel A , il existe $\varepsilon_A > 0$ tel que pour tout x vérifiant $|x - a| \leq \varepsilon_A$, on a $f(x) \geq A$.

($|x - a| \leq \varepsilon_A$ se réécrit $-\varepsilon_A \leq x - a \leq \varepsilon_A$ ou encore $x \in [a - \varepsilon_A; a + \varepsilon_A]$)

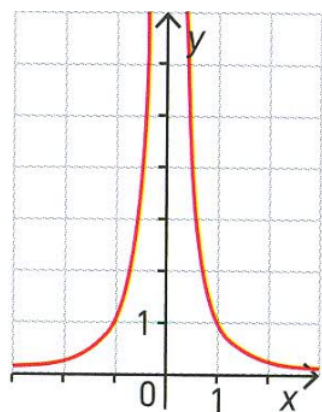
On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

- Une fonction f a **pour limite** $-\infty$ **en** a si tout intervalle de la forme $] -\infty; A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a .

On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.



Exemple 3.



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Quel que soit l'intervalle I de la forme $I =]A; +\infty[$ (où $A > 0$), si x est suffisamment proche de 0, alors $\frac{1}{x^2}$ sera supérieur à A (donc appartiendra à I). En effet :

Si $0 < x < \frac{1}{\sqrt{A}}$ (c'est notre ε_A), alors on a $0 < x^2 < \frac{1}{A}$ (car la fonction carré est croissante sur $]0; +\infty[$), et donc $\frac{1}{x^2} > A$, c'est à dire $f(x) \in]A; +\infty[$.

On peut tenir le même raisonnement dans le cas où $-\frac{1}{\sqrt{A}} < x < 0$, en utilisant le fait que la fonction carré est décroissante sur $] -\infty; 0[$.

Donc, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Remarque 1.

Une fonction peut avoir une limite « à droite » et une limite « à gauche » qui sont différentes.

Dans l'exemple ci-contre, on peut conjecturer graphiquement :

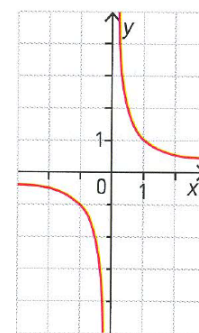
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

Mais $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)$ n'existe pas.

Cela tient au fait que x change de signe en 0, tandis que dans l'exemple précédent, x^2 ne change pas de signe en 0.

Il faut donc comprendre les choses ainsi :

- Si le dénominateur se rapproche de 0 par valeur positive, lorsque x se rapproche d'un certain a (par valeur inférieure ou supérieure donc), alors son inverse tendra vers $+\infty$.
- Si le dénominateur se rapproche de 0 par valeur négative, lorsque x se rapproche d'un certain a (par valeur inférieure ou supérieure donc), alors son inverse tendra vers $-\infty$.



B. Interprétation graphique

Définition 5.

Soit a un réel.

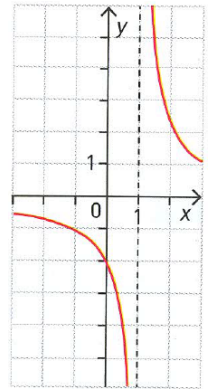
Si une fonction f a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en a , à gauche ou à droite, on dit que sa courbe représentative admet la droite d'équation $x = a$ comme **asymptote verticale**.

Exemple 4.

Soit la fonction f définie sur $] -\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

On peut conjecturer graphiquement $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$.

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f .



III. Limites et opérations

Dans ce paragraphe, f et g désignent deux fonctions, l et l' deux réels.

Le symbole ∞ désigne soit $+\infty$ soit $-\infty$.

Les propriétés ci-dessous portent sur les limites en $+\infty$, en $-\infty$ ou en $a \in \mathbb{R}$.

A. Somme

Propriété 3.

$\lim f =$	l	l'	l''	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(f+g) =$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	On ne peut pas conclure

Exemple 5.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = -\infty$.

Remarque 2.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors on ne peut pas conclure sur la limite de $(f+g)$ en $+\infty$ à l'aide de cette propriété : on dit qu'on a une **forme indéterminée**.

Il est nécessaire de transformer l'écriture de $f(x) + g(x)$ pour déterminer cette limite éventuelle.

B. Produit

Propriété 4.

$\lim f =$	l	$l \neq 0$	$+\infty$	0
$\lim g =$	l'	∞	∞	∞
$\lim(f \times g) =$	ll'	∞	∞	On ne peut pas conclure

Exemple 6.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -3$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \times g(x)) = 3$.

Remarque 3.

Quand le tableau indique $\lim(fg) = \infty$, il faut utiliser la règle des signes pour conclure.

Exemple 7.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \times g(x)) = +\infty$.

C. Quotient

Propriété 5.

$\lim f =$	l	l	l	∞	∞	0
$\lim g =$	$l' \neq 0$	0	∞	l	∞	0
$\lim \left(\frac{f}{g} \right) =$	$\frac{l}{l'}$	∞	0	∞	On ne peut pas conclure	On ne peut pas conclure

Exemple 8.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -2$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = +\infty$ (on utilise la règle des signes).

Remarque 4.

Quand le tableau indique $\lim(g) = 0$, il faut connaître le signe de $g(x)$ pour pouvoir appliquer la règle des signes et conclure sur la limite de $\frac{f}{g}$.

L'exemple classique est celui de la limite en 0 de la fonction inverse. Il faut distinguer les cas où x se rapproche de 0 par valeur supérieure, ou par valeur inférieure.

En voici un autre.

Exemple 9.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, avec $g(x) > 0$ à partir d'une certaine valeur de x ,

alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = -\infty$.

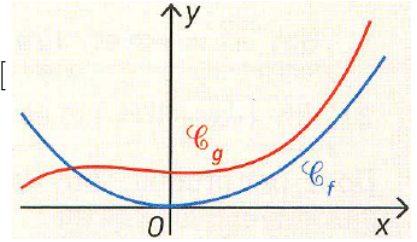
IV. Limites et comparaison

A. Limite infinie

Propriété 6.

Soient deux fonctions f et g telles que $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle $]A; +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$.

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.



Démonstration.

Laissée au lecteur. Analogue à celle pour les suites.

Remarque 5.

On a une propriété analogue quand x tend vers $-\infty$ et quand x tend vers un réel a .

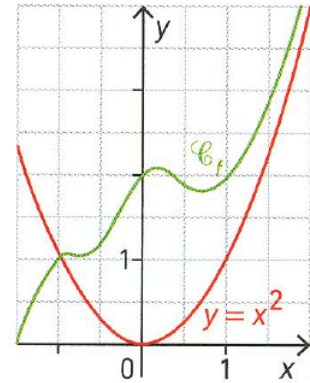
Exemple 10.

Soient f la fonction définie sur $[-1; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + \frac{2\sqrt{x+1}}{2x^2+1}$.

Pour tout $x \in [-1; +\infty[$, $\frac{2\sqrt{x+1}}{2x^2+1} \geq 0$, donc $f(x) \geq x^2$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.

On peut donc en conclure, par comparaison, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.



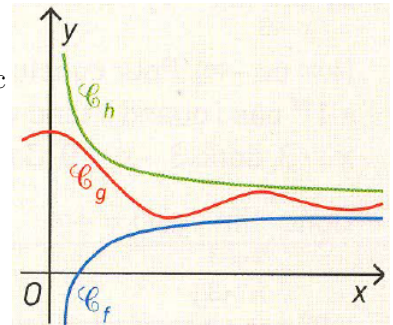
B. Limite finie

Théorème 1.

Soient trois fonctions f, g et h telles que, sur un intervalle $]A; +\infty[$, avec $A \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Soit l un réel.

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$.
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = l$.
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$.



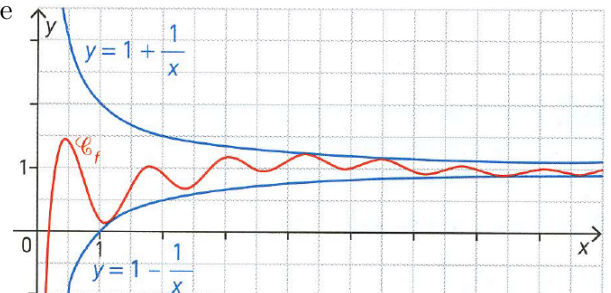
Exemple 11.

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ dont la courbe représentative est donnée ci-contre et telle que, pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$1 - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x}.$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$.

On peut donc en conclure, avec le théorème des gendarmes, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.



V. Fonction exponentielle et croissance comparée

Théorème 2 (Limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction exponentielle).

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$.

Démonstration (Par comparaison à x).

- Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$.
Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme de fonctions l'étant, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = e^x - 1$.
Donc, f' est croissante, et pour tout $x \geq 0$, $f'(x) \geq f'(0) = 0$.
Ainsi, f est croissante sur $[0 ; +\infty[$, et donc pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq f(0) = 1$ donc $f(x) \geq 0$.
donc pour tout $x \geq 0$, $e^x \geq x$.
- Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, on obtient, par comparaison,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

- En écrivant $X = -x$, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^{-X} \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^X} = 0, \text{ d'après ce qui précède.}$$

Remarque 6.

Dans le fichier « Liste des démonstrations exigibles » fourni en début d'année, vous trouverez deux autres démonstrations de ce théorème. La démonstration de ce théorème est exigible au programme, il vous suffit d'en connaître une des trois proposées.

Théorème 3 (Croissance comparée de $x \mapsto x^n$ et $\exp$ en $+\infty$).

Pour tout entier naturel n , on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$.

Démonstration (exigible).

- On montre dans un premier temps que $e^x \geq \frac{x^2}{2}$ sur un intervalle du type $[A ; +\infty[$, où A est un réel.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$. On la dérive deux fois de suite et on note f'' la dérivée de f' .
On a : $f'(x) = e^x - x$, puis $f''(x) = e^x - 1$.
On sait que f'' ne s'annule qu'en 0.
Sur $] -\infty ; 0]$, la fonction f'' est négative, donc f' est décroissante.
Sur $[0 ; +\infty[$, la fonction f'' est positive, donc f' est croissante.
 f' admet donc un minimum égal à $f'(0) = 1 - 0 = 1$.
Ainsi, f' est positive sur $\mathbb{R}$ et donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.
Comme $f(0) = 1$, on en déduit que, pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) \geq 0$, c'est à dire : $e^x \geq \frac{x^2}{2}$.
- Il vient alors, pour tout $x > 0$, l'inégalité $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$.
D'après le théorème de comparaison, on conclut que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
- Dans l'égalité $\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{1}{n} \times \frac{\exp\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} \right)^n$, on reconnaît la formule précédente : $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$.
Cette formule permet d'affirmer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.
- En posant $X = -x$, on écrit $x^n e^x = (-1)^n \frac{X^n}{e^X}$.
Par inverse de la formule établie précédemment, on obtient $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$.

VI. Limites et composition

A. Limite de la composée de deux fonctions

Propriété 7.

f et g désignent deux fonctions.

a, b et c désignent soit des réels, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

$$\text{Si } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \\ \lim_{X \rightarrow b} g(X) = c \end{cases}, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c.$$

Remarque 7.

Le nombre $g(f(x))$ est l'image par g du nombre $X = f(x)$, lui-même image de x par f .

On a donc appliqué successivement les fonctions f et g :

$$x \mapsto f(x) = X \mapsto g(X) = g(f(x)).$$

On a dit qu'on a « composé » les fonctions f et g .

Cela définit une nouvelle fonction que l'on note $g \circ f$. (cela se lit « g rond f »)

Exemple 12.

Soit la fonction h définie sur $] -\infty; 1]$ par $h(x) = \sqrt{1-x}$. On s'intéresse à la limite de h en $-\infty$.

On pose $X = 1-x$. On a ainsi $h(x) = \sqrt{X}$.

On a $x \mapsto 1-x \mapsto \sqrt{1-x}$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 1-x = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{cases} \quad \text{donc, par composition,} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-x} = +\infty.$$

B. Limite de la composée d'une suite et d'une fonction

Propriété 8.

Soit f une fonction et soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = f(n)$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, où l désigne un réel, ou $+\infty$ ou $-\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Remarque 8.

La réciproque de cette propriété est fausse !

Il est tentant, mais faux, de penser que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

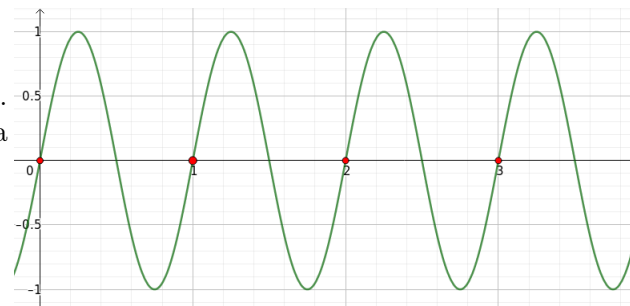
Voici deux contre exemples :

Avec $l = +\infty$ et la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2\pi x)$.

f n'a pas de limite, tandis que, quelque soit l'entier n , on a

- $u_n = \sin(2\pi n) = 0$.

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x)$ n'existe pas.

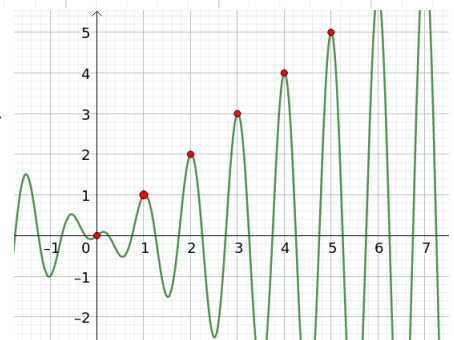


Avec $l = +\infty$ et la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi x\right)$.

f n'a pas de limite, tandis que, quelque soit l'entier n ,

- on a $u_n = n \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = n \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = n \times 1 = n$.

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x)$ n'existe pas.



Propriété 9.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit (u_n) une suite dont tous les termes appartiennent à I . a et b désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = b$.

Exemple 13.

- Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $v_n = \sqrt{n^2 - 1}$.
On applique la propriété avec $u_n = n^2 - 1$ et $f(x) = \sqrt{x}$:

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{cases}, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

- Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $v_n = \sqrt{\frac{1}{n^2 - 1}}$.

On applique la propriété avec $u_n = \frac{1}{n^2 - 1}$ et $f(x) = \sqrt{x}$:

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2 - 1} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0 \end{cases}, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$

VII. Limite et continuité : extension du TVI

On rappelle la définition suivante, dont on peut maintenant mieux comprendre la portée.

Définition 6.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que la fonction f est **continue en un réel** a de I si :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Remarquez qu'il s'agit en fait du cas de la section II, non évoqué, où il n'y a « pas de problème » (fonction bien définie et ne présentant pas de « saut »).

Avec la notion de limite en l'infini ou en un réel, d'une fonction f , on peut maintenant généraliser le théorème des valeurs intermédiaires au cas d'intervalles non bornés.

Théorème 4.

Soit a un réel et f une fonction définie et **continue** sur l'intervalle $]a; +\infty[$.

On suppose de plus que f est **strictement croissante** sur $]a; +\infty[$,

que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ où l peut être un réel ou $+\infty$.

Alors pour tout réel $k \in]-\infty; l[$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution x_0 dans $]a; +\infty[$.

Exemple 14.

- Cette situation correspond à une fonction f dont le tableau de variation est :

x	a	x_0	$+\infty$
Variations de f			

- Le théorème a été donné dans un cas particulier, et on peut bien sûr l'adapter aux cas :
 - d'une fonction strictement croissante sur $] -\infty; a[$;
 - d'une fonction strictement décroissante sur $] -\infty; a[$ avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.