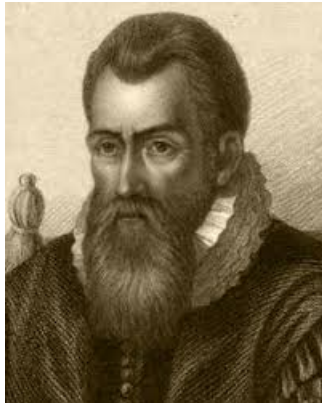


## CHAPITRE 9

### FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN



JOHN NAPIER, parfois francisé en Jean Neper, né en 1550 et mort le 4 avril 1617, est un théologien, physicien, astronome et mathématicien écossais.

Fils aîné d'Archibald Napier et de Janet Bothwell, il est issu d'une riche famille, lui-même baron de Merchiston.

Il se fait connaître par sa défense du protestantisme. Il met notamment en garde le roi Jacques VI d'Écosse contre les visées du roi catholique Philippe II d'Espagne.

Les activités mathématiques ne constituaient qu'un passe-temps pour Neper.

On le connaît pour avoir donné quelques formules en trigonométrie sphérique, et pour avoir popularisé la notation du point pour séparer la partie entière et la partie fractionnaire d'un nombre en écriture décimale. Surtout, il est passionné par le fait de rendre le plus simple et le plus rapide possible les calculs portant sur les multiplications, les divisions et les extractions de racine carrée de grands nombres.

Cela le conduit d'une part à l'invention des os de Neper, des petits bâtons de bois sur lesquels sont inscrits les tables de multiplication, et qui permettent de simplifier ces opérations. Surtout, cela le conduit à l'invention des logarithmes.

#### I. Définition de la fonction logarithme népérien

Au collège, nous savions résoudre dans  $[0; +\infty[$  l'équation  $x^2 = 4$ .

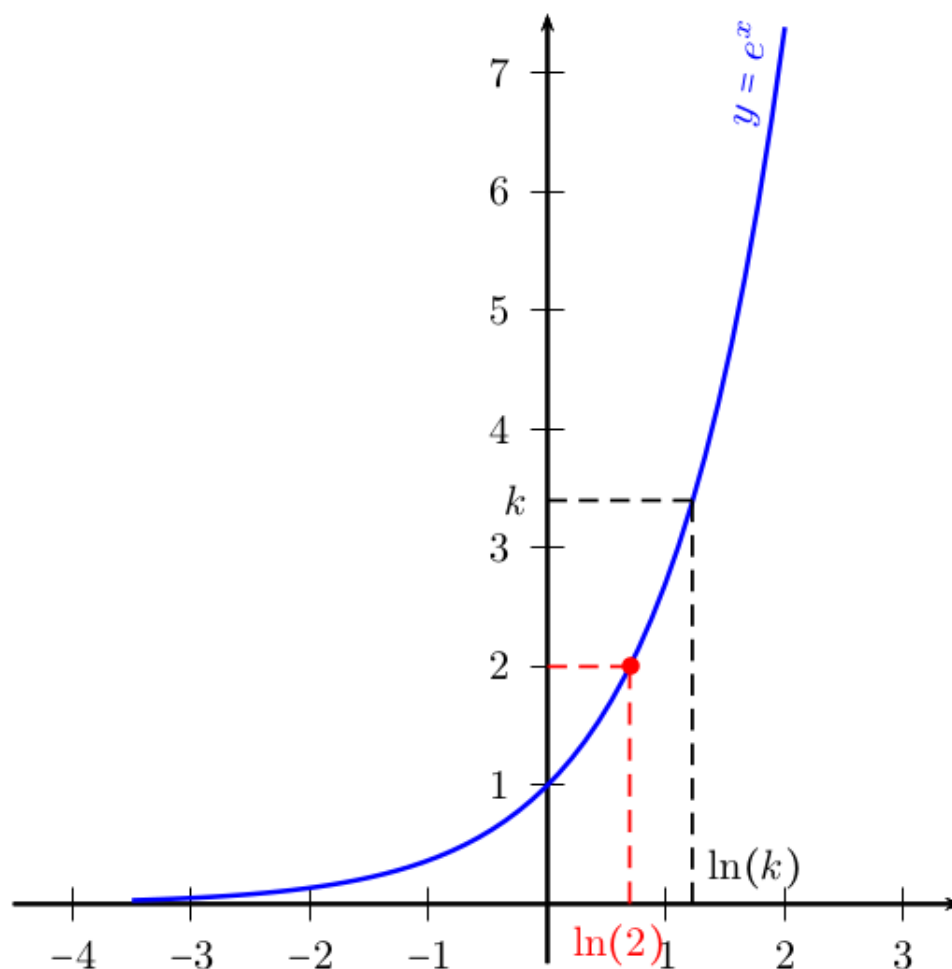
Cette équation a une solution positive et une seule à savoir  $x = 2$  car  $2^2 = 4$ . Mais pour résoudre dans  $[0; +\infty[$  l'équation  $x^2 = 2$ , nous n'avons pas de solution évidente de cette équation et nous avons dû créer une nouvelle fonction : la fonction racine carrée.

Une fois cette fonction créée, nous disposons d'un symbole pour résoudre dans  $[0; +\infty[$  l'équation  $x^2 = 2$  : cette équation admet une solution positive et une seule à savoir  $x = \sqrt{2}$ .

Nous ne connaissons pas la valeur exacte de  $\sqrt{2}$  et nous devons prendre la calculatrice pour lire  $\sqrt{2} = 1,414\dots$

Le principe est le même avec la fonction exponentielle. À ce niveau du cours, on sait résoudre l'équation  $e^x = 1$  (cette équation admet une solution et une seule à savoir  $x = 0$ ) ou bien on sait résoudre l'équation  $e^x = e^2$  (cette équation admet une solution et une seule à savoir  $x = 2$ ).

Mais on ne sait pas encore résoudre l'équation  $e^x = 2$ . On crée pour cela une nouvelle fonction : la fonction **logarithme népérien**.



Graphiquement l'équation  $e^x = 2$  admet une solution et une seule dans  $]0; +\infty[$ . Cette solution est notée  $\ln(2)$  par définition,  $\ln(2)$  se lisant « logarithme népérien de 2 ». Le mot « népérien » vient du nom du mathématicien écossais JOHN NEPER qui inventa les logarithmes (voir encadré de la première page). Nous ne connaissons pas la valeur exacte de  $\ln(2)$  et nous devons prendre la calculatrice pour lire

$$\ln(2) = 0,693\dots$$

De manière générale, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires permet de montrer que pour tout réel strictement positif  $k$ , l'équation  $e^x = k$  admet une solution et une seule dans  $\mathbb{R}$ . Cette solution est par définition  $\ln(k)$ , le logarithme népérien du nombre réel strictement positif  $k$ .

On peut énoncer :

### Définition 1.

Soit  $x$  un réel strictement positif. Le **logarithme népérien** de  $x$  est l'unique réel dont l'exponentielle est égale à  $x$ . Il est noté  $\ln(x)$ .

On définit ainsi une fonction sur  $]0; +\infty[$ , la fonction  $\ln$ .

Par construction de la fonction logarithme népérien, on obtient le théorème suivant :

### Théorème 1.

1. Pour tout réel  $a$  et tout réel strictement positif  $b$ ,  $e^a = b \Leftrightarrow a = \ln(b)$ .
2. Pour tout réel strictement positif  $a$  et tout réel  $b$ ,  $\ln(a) = b \Leftrightarrow a = e^b$ .

Ceci a pour conséquence le théorème :

### Théorème 2.

1. Pour tout réel  $x$ ,  $\ln(e^x) = x$ .
2. Pour tout réel strictement positif  $x$ ,  $e^{\ln(x)} = x$ .

### Démonstration.

1. Soit  $x$  un réel et  $y$  un réel strictement positif.

$$y = \ln(e^x) \Leftrightarrow e^y = e^x \Leftrightarrow y = x$$

Et donc  $\ln(e^x) = x$ .

2. Soit  $x$  un réel strictement positif. Par définition,  $\ln(x)$  est l'unique réel dont l'exponentielle est égale à  $x$  et donc  $e^{\ln(x)} = x$ .

### Commentaire.

On dit que la fonction exponentielle et la fonction logarithme népérien sont **réciroques** l'une de l'autre. C'est le même principe pour les fonctions « carré » et « racine carrée » : pour tous réels **positifs**  $a$  et  $b$ ,

$$a^2 = b \Leftrightarrow a = \sqrt{b} \text{ et } \sqrt{a} = b \Leftrightarrow a = b^2$$

et aussi pour tout réel **positif**  $x$ ,

$$(\sqrt{x})^2 = x \text{ et } \sqrt{x^2} = x$$

Des fonctions réciproques l'une de l'autre sont représentées par des courbes qui sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation  $y = x$ .

### Théorème 3.

$$\ln(1) = 0 \text{ et } \ln(e) = 1$$

En effet :

- l'unique réel dont l'exponentielle est égale à 1 est le réel 0 ;
- l'unique réel dont l'exponentielle est égale à  $e$  est le réel 1.

### Exemple 1.

Résolvons dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1.  $e^{5x+1} = 3$
2.  $\ln(2x - 4) = 7$

1. Soit  $x$  un réel.

$$e^{5x+1} = 3 \Leftrightarrow 5x + 1 = \ln(3) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(3) - 1}{5}$$

L'équation possède une solution :

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \frac{\ln(3) - 1}{5} \right\}.$$

2. Soit  $x$  un réel tel que  $2x - 4 > 0$ , c'est à dire soit  $x > 2$ .

$$\ln(2x - 4) = 7 \Leftrightarrow 2x - 4 = e^7 \Leftrightarrow x = \frac{e^7 + 4}{2}$$

On vérifie que  $\frac{e^7 + 4}{2} \approx 550 > 2$ , et donc l'équation possède une solution :

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \frac{e^7 + 4}{2} \right\}.$$

## II. Propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien

### A. Relation fonctionnelle

#### Théorème 4.

Pour tous réels strictement positifs  $x$  et  $y$ ,  $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$ .

#### Démonstration.

Soient  $x$  et  $y$  deux réels strictement positifs.

On sait que  $\exp(\ln(x \times y)) = x \times y$ , et :

$$\exp(\ln(x) + \ln(y)) = \exp(\ln(x)) \times \exp(\ln(y)) = x \times y.$$

Ainsi, les deux réels  $\ln(x \times y)$  et  $\ln(x) + \ln(y)$  ont la même exponentielle. On en déduit que ces deux réels sont égaux. On a donc montré que  $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$ .

### B. Propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien

#### Théorème 5.

1. Pour tous réels strictement positifs  $x$  et  $y$ ,  $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$ .
2. Pour tout réel strictement positif  $x$ ,  $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ .
3. Pour tous réels strictement positifs  $x$  et  $y$ ,  $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$ .
4. Pour tout réel strictement positif  $x$  et tout entier relatif  $n$ ,  $\ln(x^n) = n \ln(x)$ .
5. Pour tout réels strictement positif  $x$ ,  $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$ .

#### Démonstration.

Les propriétés 2. 3. 4. et 5. se déduisent de la relation fondamentale 1. et de l'égalité  $\ln(1) = 0$ .

2. Soit  $x$  un réel strictement positif.

$$\ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) = \ln(1) = 0$$

et donc  $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ .

3. Soient  $x$  et  $y$  deux réels strictement positifs.

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \times \frac{1}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

4. Se démontre par récurrence. Laissez au lecteur.

5. Soit  $x$  un réel strictement positif.

$$2 \ln(\sqrt{x}) = \ln((\sqrt{x})^2) = \ln(x).$$

et donc  $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$ .

**Commentaire.**

On pouvait aussi déduire chacune des formules de 2. à 5. de la formule correspondante pour la fonction exponentielle en calculant à chaque fois l'exponentielle des deux membres de l'égalité à établir.

Ainsi, le logarithme népérien transforme un produit en somme (le logarithme népérien d'un produit est la somme des logarithmes) et l'exponentielle transforme les sommes en produit (l'exponentielle d'une somme est le produit des exponentielles).

Plus généralement, le logarithme transforme toute notion liée à la multiplication en son équivalent pour l'addition. Par exemple, l'équivalent pour l'addition de la phrase « le produit d'un nombre non nul par son inverse est égal à 1 » est la phrase « la somme d'un nombre et de son opposé est 0 ».

Le logarithme transforme donc 1 en 0 et l'inverse en l'opposé.

| le logarithme népérien transforme                                 |    |                                                                  |
|-------------------------------------------------------------------|----|------------------------------------------------------------------|
| <b>Les produits</b><br>$\ln(x \times y)$                          | en | <b>sommes</b><br>$\ln(x) + \ln(y)$                               |
| <b>Les quotients</b><br>$\ln\left(\frac{x}{y}\right)$             | en | <b>différences</b><br>$\ln(x) - \ln(y)$                          |
| <b>L'inverse</b><br>$\ln\left(\frac{1}{x}\right)$                 | en | <b>l'opposé</b><br>$-\ln(x)$                                     |
| 1<br>$\ln(1)$                                                     | en | 0<br>0                                                           |
| $\ln(\underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ facteurs}})$ | en | $\underbrace{\ln(x) + \cdots + \ln(x)}_{n \text{ termes}}$       |
| $\ln(x^n)$                                                        | =  | $n \ln(x)$                                                       |
| <b>La racine carrée</b><br>$\ln(\sqrt{x})$                        | en | <b>la moitié</b><br>$\frac{1}{2} \ln(x)$                         |
| l'exponentielle transforme                                        |    |                                                                  |
| <b>Les sommes</b><br>$e^{x+y}$                                    | en | <b>produit</b><br>$e^x \times e^y$                               |
| <b>Les différences</b><br>$e^{x-y}$                               | en | <b>quotients</b><br>$\frac{e^x}{e^y}$                            |
| <b>L'opposé</b><br>$e^{-x}$                                       | en | <b>l'inverse</b><br>$\frac{1}{e^x}$                              |
| 0<br>$e^0$                                                        | en | 1<br>1                                                           |
| $\exp(\underbrace{x + \cdots + x}_{n \text{ termes}})$            | en | $\underbrace{e^x \times \cdots \times e^x}_{n \text{ facteurs}}$ |
| $e^{nx}$                                                          | =  | $(e^x)^n$                                                        |
| <b>La moitié</b><br>$e^{\frac{x}{2}}$                             | en | <b>la racine carrée</b><br>$\sqrt{e^x}$                          |

**Exemple 2.**

Simplifions les expressions suivantes :

$$A = \ln(4) - 2\ln(8) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad B = \ln(3 - \sqrt{2}) + \ln(3 + \sqrt{2})$$

$$\begin{aligned} A &= \ln(4) - 2\ln(8) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \ln(2^2) - 2\ln(2^3) - \ln(2) \\ &= 2\ln(2) - 2 \times 3\ln(2) - \ln(2) \\ &= -5\ln(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \ln(3 - \sqrt{2}) + \ln(3 + \sqrt{2}) \\ &= \ln((3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})) \\ &= \ln(3^2 - \sqrt{2}^2) \\ &= \ln(7) \end{aligned}$$

**III. Propriétés analytiques de la fonction logarithme népérien****A. Dérivée de la fonction logarithme népérien****Théorème 6.**

La fonction  $\ln$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et

$$\text{pour tout réel strictement positif, } \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

**Démonstration (1).**

Dans cette démonstration, on admet que  $\ln$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

Pour tout réel strictement positif  $x$ , on a  $\exp(\ln(x)) = x$ .

En dérivant cette égalité, pour tout  $x > 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \exp(\ln(x)) = x &\implies \ln'(x) \times \exp(\ln(x)) = 1 \\ &\implies \ln'(x) \times x = 1 \\ &\implies \ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{car } x \neq 0 \end{aligned}$$

**Démonstration (2).**

Soient  $x_0$  et  $x$  deux réels strictement positifs et distincts. On va évaluer  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln(x) - \ln(x_0)}{x - x_0}$ .

Par définition, si cette limite existe, il s'agira de la valeur de  $\ln'(x_0)$ , et la fonction  $\ln$  sera dérivable en  $x_0$ .

Pour cela, posons  $x_0 = e^{y_0}$  et  $x = e^y$ .

Puisque  $x \neq x_0$ , on a  $e^y \neq e^{y_0}$  et donc  $y \neq y_0$ . On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\ln(x) - \ln(x_0)}{x - x_0} &= \frac{y - y_0}{e^y - e^{y_0}} \\ &= \frac{1}{\frac{e^y - e^{y_0}}{y - y_0}} \end{aligned}$$

Admettons pour cette démonstration la continuité de la fonction  $\ln$  sur  $]0; +\infty[$ .

Quand  $x$  tend vers  $x_0$ ,  $\ln(x)$  tend vers  $\ln(y_0)$  (continuité de  $\ln$  en  $x_0$ ), et donc  $y$  tend vers  $y_0$ .

Par suite, puisque  $\exp'(y_0) = e^{y_0} \neq 0$ , on a :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln(x) - \ln(x_0)}{x - x_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\frac{e^y - e^{y_0}}{y - y_0}} = \frac{1}{\exp'(y_0)} = \frac{1}{e^{y_0}} = \frac{1}{x_0}.$$

Cela démontre que  $\ln'(x_0)$  existe et vaut  $\frac{1}{x_0}$ .

Comme  $x_0$  est quelconque, strictement positif, on en déduit que :

$$\ln \text{ est dérivable sur } ]0; +\infty[, \text{ et pour tout } x > 0, \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

## B. Sens de variation de la fonction logarithme népérien

### Théorème 7.

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

### Démonstration.

La fonction logarithme népérien est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et pour tout réel  $x > 0$ ,  $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ .  $\ln'$  est strictement positive sur  $]0; +\infty[$ , donc  $\ln$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

Le théorème précédent a des conséquences pour la résolution des équations et des inéquations.

### Théorème 8.

1. Pour tous réels strictement positifs  $a$  et  $b$  :

(a)  $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$ ;

(b)  $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$ .

2. Pour tout réel  $x$  strictement positif :

(a)  $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ ;

(b)  $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ .

### Exemple 3.

1. L'équation  $\ln(5x + 10) = \ln(x - 2)$  est bien définie pour  $x$  tel que  $5x + 10 > 0$  et  $x - 2 > 0$ , c'est à dire pour  $x > 2$ .

Pour tout  $x > 2$ ,  $\ln(5x + 10) = \ln(x - 2) \Leftrightarrow 5x + 10 = x - 2 \Leftrightarrow x = -3$ .

Comme  $-3 \notin ]2; +\infty[$ ,

$$\mathcal{S}_1 = \emptyset$$

2. L'inéquation  $\ln(x + 3) < \ln(2x - 2)$  est bien définie pour  $x$  tel que  $x + 3 > 0$  et  $2x - 2 > 0$ , c'est à dire pour  $x > 1$ .

Pour tout  $x > 1$ ,  $\ln(x + 3) < \ln(2x - 2) \Leftrightarrow x + 3 < 2x - 2 \Leftrightarrow x > 5$ .

Comme  $]5; +\infty[ \subset ]1; +\infty[$ ,

$$\mathcal{S}_2 = ]5; +\infty[.$$

3. Déterminons le plus petit entier  $n$  tel que  $2^n \geq 10^9$ .

Jusqu'ici on aurait répondu à cette question en utilisant le tableur de la calculatrice ou en faisant tourner un petit algorithme.

Voici une méthode directe. Soit  $n$  un entier naturel :

$$2^n \geq 10^9 \Leftrightarrow \ln(2^n) \geq \ln(10^9) \quad \text{car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur } ]0; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow n \ln(2) \geq 9 \ln(10)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{9 \ln(10)}{\ln(2)} \quad \text{car } 2 > 1 \implies \ln(2) > 0$$

$$\Leftrightarrow n \geq 29,8\dots$$

$$\Leftrightarrow n \geq 30 \quad \text{car } n \text{ est un entier}$$

$$\mathcal{S}_3 = \llbracket 30; +\infty[.$$

Les doubles crochets signifiant que l'on ne considère que les valeurs entières de l'intervalle.

## C. Limites de $\ln(x)$ en 0 et $+\infty$

### Théorème 9.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$$

### Démonstration.

Soit  $A$  un réel.

Pour  $x > e^A$ , on a  $\ln(x) > \ln(e^A)$  ou encore  $\ln(x) > A$ .

Ainsi, tout intervalle de la forme  $]A; +\infty[$  contient  $\ln(x)$  pour  $x$  suffisamment grand (ici plus grand que  $e^A$ ).

Par définition, ceci montre que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ .

Ensuite, en posant  $X = \frac{1}{x}$ , on obtient :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\ln(X) = -\infty.$$

## D. Deux théorèmes de croissances comparées

Quand  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $\ln(x)$  tend vers  $+\infty$  et  $x$  tend vers  $+\infty$ .

Nous ne savons donc momentanément pas calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$  puisque nous sommes en présence d'une forme indéterminée.

Le théorème suivant lève cette indétermination et une autre indétermination.

### Théorème 10.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0.$$

### Démonstration.

Posons  $X = \ln(x)$  de sorte sur  $x = e^X$ . On obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^X}{X}} = 0 \quad \left( \text{car } \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty, \text{ par croissance comparée} \right)$$

Puis en posant  $X = \frac{1}{x}$ , on obtient :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{\ln(X)}{X} = 0.$$

---

Les deux fonctions  $x \mapsto \ln(x)$  et  $x \mapsto x$  tendent vers  $+\infty$  en croissant. Mais la croissance de la fonction  $x \mapsto \ln(x)$  vers  $+\infty$  est bien plus lente que celle de la fonction  $x \mapsto x$ . La fonction  $x \mapsto x$  l'emporte sur la fonction  $x \mapsto \ln(x)$  en  $+\infty$  et on a de même, en 0.

**Exemple 4.**

Déterminons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x))$ .

À priori, on a une forme indéterminée du type  $\infty - \infty$ .

Mais, pour tout  $x > 0$ ,  $x - \ln(x) = x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$ .

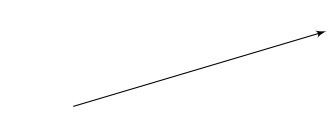
Or d'après le théorème précédent de croissance comparée,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ , et donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = 1$ .

Comme de plus  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ , on aboutit, par produit, à :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$$

**E. Graphe de la fonction logarithme népérien**

- On connaît déjà le sens de variation de la fonction logarithme népérien sur  $]0; +\infty[$  ainsi que les limites de cette fonction en 0 et en  $+\infty$ . On peut résumer ces différents résultats dans un tableau de variations.

| $x$                 | 0 | $+\infty$                                                                                               |
|---------------------|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\ln'(x)$           |   | +                                                                                                       |
| Variations de $\ln$ |   | $-\infty$  $+\infty$ |

- Puisque  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$ , l'axe ( $Oy$ ) est asymptote (verticale) à la courbe représentative de  $\ln$ .
- On sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ . Graphiquement, cela se traduit par le fait que la courbe représentative de la fonction logarithme a la même allure que la courbe représentative de la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . Attention, on peut montrer que  $\ln(x)$  tend vers  $+\infty$  beaucoup plus lentement que  $\sqrt{x}$  ou encore. On peut même montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$ .
- $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$ . On peut traduire cette égalité en limite.

Pour tout  $x > 0$ ,  $\frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1} = \frac{\ln(x)}{x - 1}$ , et donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} = 1.$$

ou aussi, en posant  $x = 1 + h$  où cette fois-ci,  $h$  tend vers 0,

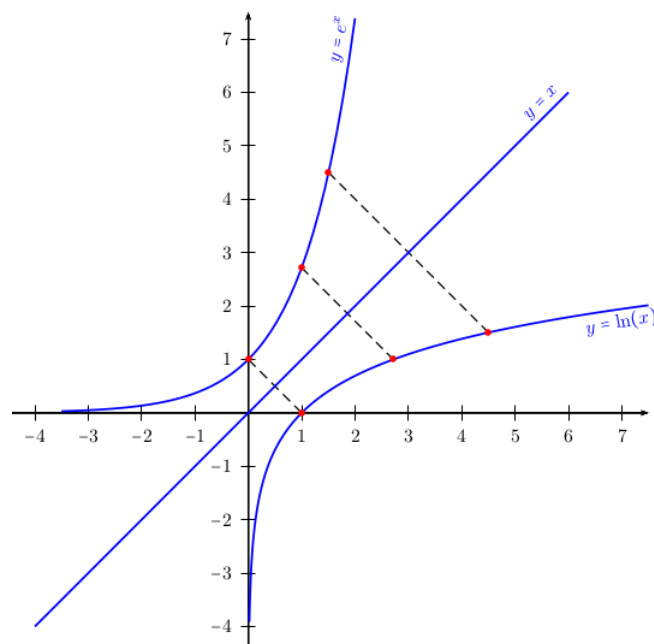
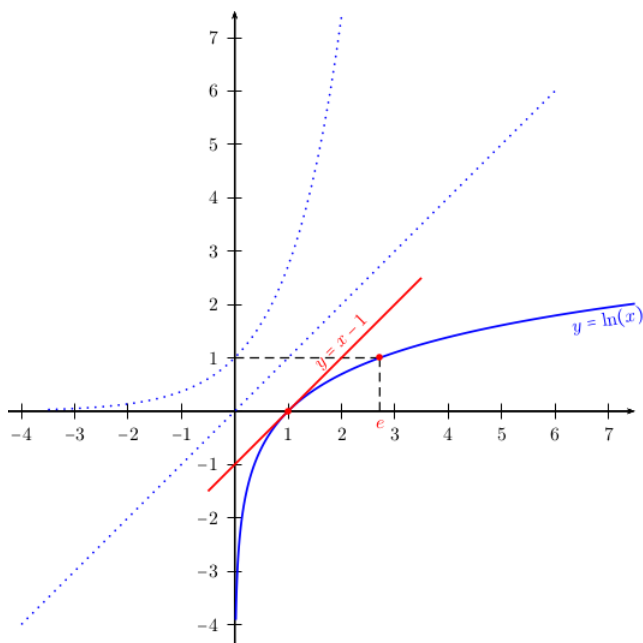
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + h)}{h} = 1.$$

Ces deux limites, équivalentes, ne sont pas triviales, puisqu'il y a à priori une forme indéterminée du type  $\frac{0}{0}$ .

Elles traduisent le fait que le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de  $\ln$  au point de coordonnées  $(1, 0)$  est égal à 1.

Cette tangente est donc la droite d'équation  $y = x - 1$ .

Voici le graphe de la fonction logarithme népérien.



À gauche, on a représenté la courbe représentative de la fonction  $\ln$ , ainsi que sa tangente au point d'abscisse 1, d'équation  $y = x - 1$ . Cette droite est la traduction géométriquement du fait (à connaître)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + h)}{h} = 1.$$

À droite, on a représenté la courbe de la fonction  $\ln$ , avec celle de sa fonction réciproque  $\exp$ .

Remarquez que, comme tout couple de fonctions réciproques, leurs courbes sont symétriques par rapport à la droite oblique d'équation  $y = x$ .

On peut donc déduire la courbe de  $\ln$  par symétrie à partir de celle de  $\exp$ .

Ainsi, par exemple, les points de coordonnées respectives (1, 0) et (e, 1) appartiennent à la courbe représentative de la fonction logarithme népérien et leurs symétriques par rapport à la droite d'équation  $y = x$ , à savoir les points de coordonnées respectives (0, 1) et (1, e), appartiennent à la courbe représentative de la fonction exponentielle.