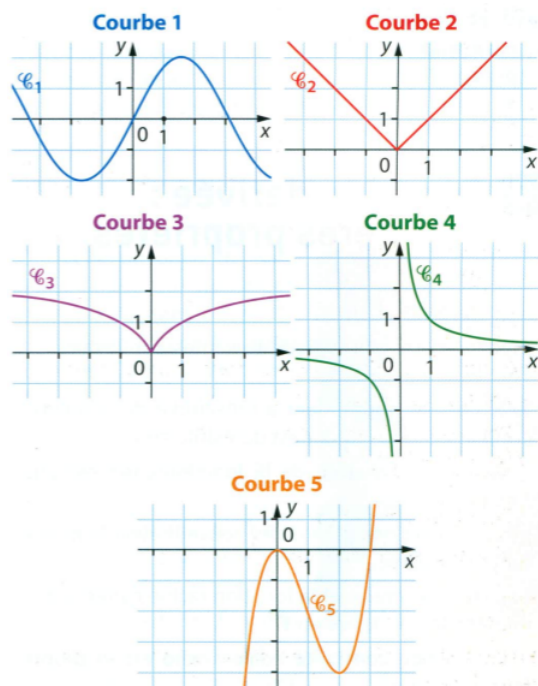


1 Dérivées

1.1 Rappels

Exercice 1

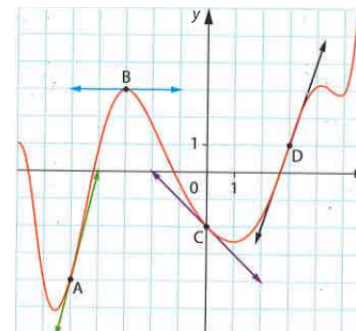
Par lecture graphique, indiquer, parmi les courbes suivantes, celles qui représentent une fonction dérivable en 0.



Exercice 2

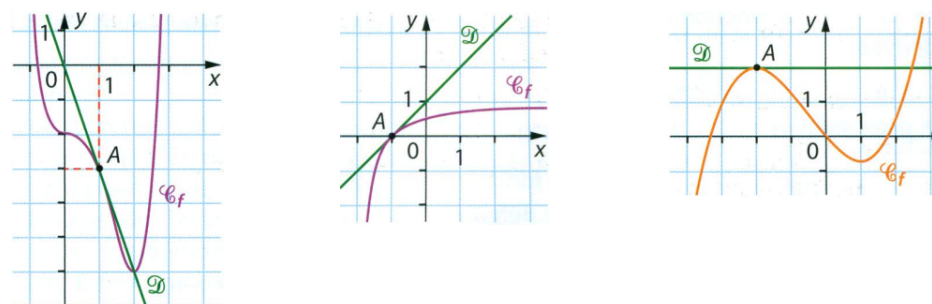
On a représenté la courbe d'une fonction f et certaines de ses tangentes.

1. Rappeler l'interprétation graphique de $f'(3)$.
2. Lire graphiquement $f'(3)$.
3. De même lire $f'(-5)$, $f'(-3)$ et $f'(0)$.



Exercice 3

Sur chacun des graphiques suivants, on a représenté dans un repère du plan la courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f dérivable en a , ainsi que la droite $\mathcal{D}$ tangente à $\mathcal{C}$ au point $A(a; f(a))$.

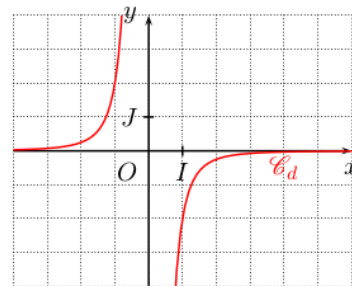
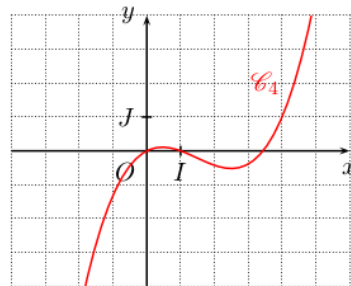
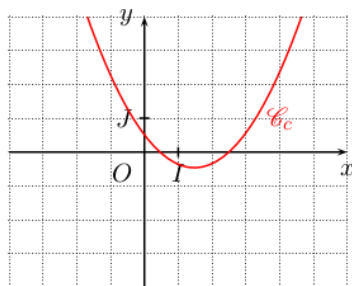
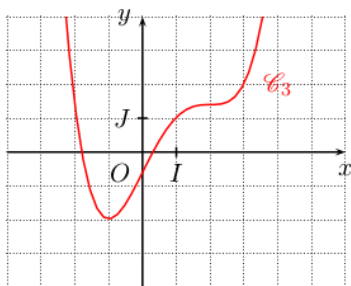
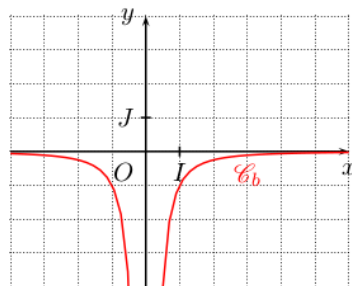
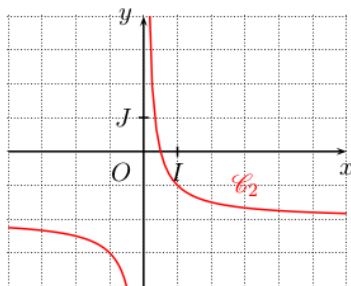
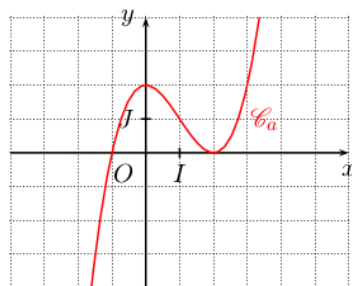
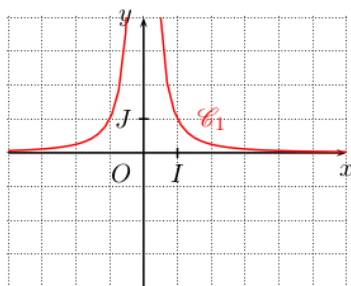


Déterminer a , $f(a)$ et $f'(a)$ par lecture graphique, puis déterminer une équation de $\mathcal{D}$.

Exercice 4

Les courbes suivantes représentent celles de quatre fonctions dérivables (courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$) et celles de leur fonction dérivée (courbes $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_b, \mathcal{C}_c$ et $\mathcal{C}_d$) dans un ordre arbitraire.

Observer attentivement ces courbes et associer à chaque fonction sa fonction dérivée en expliquant le choix effectué.



1.2 Utilisation des formules

Exercice 5 - classe de première

On donne l'expression de $f(x)$. Préciser sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$.

$$f_1(x) = -2x + 1$$

$$f_3(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 1$$

$$f_5(x) = (-3 + x^2) \left(x - 2 + \frac{5}{3}x^7 \right)$$

$$f_7(x) = \frac{1}{x-3}$$

$$f_9(x) = \frac{2x^2}{x+3}$$

$$f_2(x) = \frac{4x-1}{3}$$

$$f_4(x) = \frac{1}{x} + 2\sqrt{x}$$

$$f_6(x) = x^3(x - \sqrt{x})$$

$$f_8(x) = \frac{-5}{x^2+1}$$

$$f_{10}(x) = \frac{2\sqrt{x+3}}{x}$$

Exercice 6 - classe de première

Montrer que les courbes représentatives des fonctions suivantes admettent la même tangente au point d'abscisse 1.

$$f : x \mapsto -x^2 + x + 3$$

$$g : x \mapsto 2 + \frac{1}{x}$$

$$h : x \mapsto -5x + 8\sqrt{x}$$

$$k : x \mapsto -x + 4$$

Exercice 7

Dans les cas suivants, justifier que f est dérivable sur l'intervalle I , puis calculer $f'(x)$ pour tout réel x de I en utilisant les formules du cours.

$$1. f(x) = \sqrt{5-x^2} \text{ et } I =]-\sqrt{5}; \sqrt{5}[$$

$$2. f(x) = (0,5x^2 - 7)^4 \text{ et } I = \mathbb{R}$$

$$3. f(x) = \frac{2}{(2x+1)^3} \text{ et } I = \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$$

$$4. f(x) = x\sqrt{3x+7} \text{ et } I = [0; +\infty[$$

$$5. f(x) = (2x+1)^3\sqrt{x} \text{ et } I =]0; +\infty[$$

$$6. f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2+3}} \text{ et } I = \mathbb{R}$$

Exercice 8

On considère la fonction f sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Démontrer que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Exercice 9

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Soit a un réel. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a .
2. Existe-t-il une tangente à la courbe $\mathcal{C}$ parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x$?
3. Existe-t-il une tangente à la courbe $\mathcal{C}$ passant par l'origine du repère ?

Exercice 10 - VRAI OU FAUX

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes.

1. Sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$, la fonction $x \mapsto -\sqrt{1-2x}$ a pour fonction dérivée

$$x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}$$

2. Sur $]0; +\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{4}{5}\sqrt{\frac{5x}{2}}$ a pour fonction dérivée

$$x \mapsto \sqrt{\frac{2}{5x}}$$

Exercice 11 - QCM

Dans chacun des cas suivants, préciser **la (ou les)** bonne réponse(s).

(On se placera, à chaque fois, sur un intervalle où la fonction est dérivable.)

1. $f : x \mapsto (5x - 1)^3$	2. $f : x \mapsto \left(\frac{2}{3}x - 1\right)^{-3}$
(a) $f'(x) = 3(5x - 1)^2$	(a) $f'(x) = -2\left(\frac{2}{3}x - 1\right)^{-4}$
(b) $f'(x) = 15(5x - 1)^4$	(b) $f'(x) = -2\left(\frac{2}{3}x - 1\right)^{-2}$
(c) $f'(x) = 15(5x - 1)^2$	(c) $f'(x) = 2\left(\frac{2}{3}x - 1\right)^{-4}$
3. $f : x \mapsto 6(7 - 2x)^7$	4. $f : x \mapsto \frac{5}{(-x + 1)^4}$
(a) $f'(x) = -42(7 - 2x)^6$	(a) $f'(x) = \frac{-20}{(-x + 1)^5}$
(b) $f'(x) = 84(7 - 2x)^6$	(b) $f'(x) = \frac{20}{(-x + 1)^5}$
(c) $f'(x) = -84(7 - 2x)^6$	(c) $f'(x) = \frac{20}{(-x + 1)^3}$
6. La tangente à la courbe de $f : x \mapsto (1 - 2x)^3$ au point d'abscisse 1 a pour équation :	
(a) $y = -6x + 5$	(b) $y = 6x + 7$ (c) $y = 3x - 4$
7. La tangente à la courbe de $f : x \mapsto \sqrt{3x - 1}$ au point d'abscisse $\frac{1}{3}$ a pour équation :	
(a) $x = \frac{1}{3}$	(b) $x = 0$ (c) $y = 0$

1.3 Composées de fonctions

Exercice 12 - Étudier un schéma de composition

1. Soit deux fonctions u et v telles que $v \circ u(x) = \frac{x^7}{x^7 + 1}$.
Déterminer v et u .
2. Établir le schéma de composition de la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{3x^2 - 5}$.

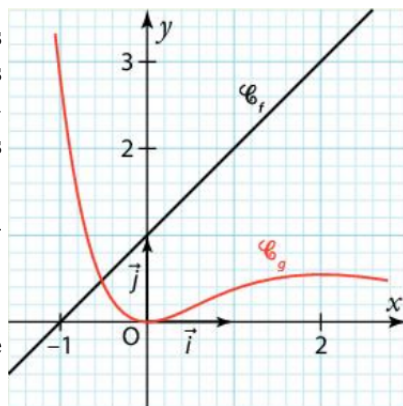
Exercice 13

Dans chacun des cas, donner le schéma de composition de la fonction f puis déterminer son ensemble de définition.

1. $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$.
2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 15}$.
4. $f(x) = (-x + 3)^4$.
5. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.
6. $f(x) = \sqrt{\frac{e^x + 1}{x}}$.

Exercice 14

1. Soit deux fonctions f et g et leurs courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un repère orthonormé. Déterminer graphiquement, s'ils existent, $f \circ g(2)$ puis $g \circ f(0)$.
2. On considère deux fonction h et j définies par $h(x) = x^5$ et $j(x) = \sqrt{x + 1}$. Déterminer $h \circ j(8)$.
3. On donne les tableaux de variations de u et v . Déterminer $u \circ v(-4)$.



x	-4	$+\infty$
Signe de $v'(x)$	+	
Variations de v	0 $\nearrow$ $+\infty$	

x	0	$+\infty$
Signe de $u'(x)$	-	
Variations de u	6 $\searrow$ $-\infty$	

Exercice 15 - Calculs de dérivées

Dans chacun des cas, exprimer $f'(x)$ en fonction de x .

1. $f(x) = e^{-x+2}$.
2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.
3. $f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$.
4. $f(x) = (4e^{-x} + 1)^3$.

Exercice 16 - Calculs de dérivées

1. Calculer la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (-x + 1)e^{3x}.$$

2. Calculer la dérivée de la fonction définie sur $\left] \frac{1}{7} ; +\infty \right[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{7x - 1}}.$$

3. Calculer la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

Exercice 17

On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$.

Déterminer l'ensemble de définition de f puis dresser son tableau de variations.

Exercice 18

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{x^2-x}$.

$\mathcal{C}$ est sa courbe représentative dans un repère et a désigne un nombre réel.

1. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a .
2. Existe-t-il une tangente à la courbe $\mathcal{C}$ passant par le point $A(1; 0)$?
Si oui, préciser l'équation de cette tangente.

1.4 Étude de fonctions

Exercice 19

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x^2 - 4|$.

1. Tracer la courbe représentative de la fonction f .
2. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 20

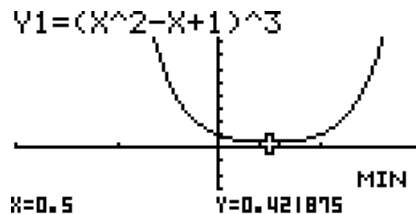
1. **À l'aide de la calculatrice**, conjecturer que la fonction f définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$ admet un maximum que l'on précisera pour une valeur de x que l'on indiquera.
2. Démontrer cette conjecture.

Exercice 21

Selon cet écran de calculatrice, la fonction :

$$f : x \mapsto (x^2 - x + 1)^3$$

semble admettre un minimum pour une valeur de x voisine de 0,5.
Valider cette conjecture par le calcul.



Exercice 22

Étudier la dérivabilité en 1 de chacune des fonctions suivantes définies sur l'intervalle $[1; +\infty[$:

1. $f : x \mapsto x\sqrt{x-1}$
2. $f : x \mapsto (x-1)\sqrt{x-1}$

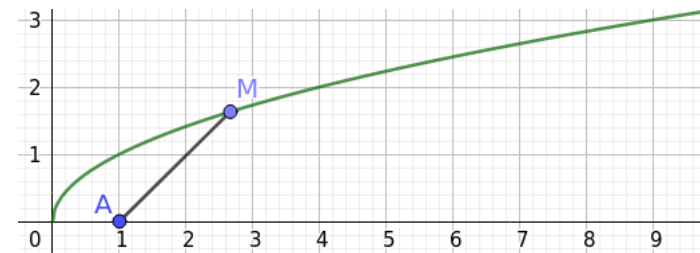
Exercice 23 - Distance d'un point fixe à un point mobile d'une courbe

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ et M un point quelconque de sa courbe représentative tracée dans un repère orthonormé (O, I, J) .

On place le point $A(1; 0)$.

Le but de cet exercice est de déterminer la position du point M pour laquelle la distance AM est minimale

1. **À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique**, réaliser la figure et compléter l'abscisse de M pour laquelle la longueur AM semble minimale. Préciser cette longueur minimale.



2. Démontrer que si on note x l'abscisse du point M , on a :

$$AM = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

3. On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

- (a) Calculer $g'(x)$ et déterminer son signe sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

- (b) Dresser le tableau de variations de la fonction g .
4. Quelle est la position du point M qui répond au problème ? Quelle est la valeur de la distance minimale recherchée ?

Exercice 24

f est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{\sqrt{2x}}.$$

1. Vérifier que, pour tout réel $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 4}{2x\sqrt{2x}}.$$

2. Montrer que f admet un minimum local.

Exercice 25

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 1}.$$

- Donner le schéma de composition de la fonction f .
- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f noté $\mathcal{D}_f$.
- Étudier $g : x \mapsto x^3 - 1$ et dresser son tableau de variations.
- En déduire le tableau de variations de f .

Exercice 26

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{1+x}}.$$

- Donner le schéma de composition de la fonction f .
- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f noté $\mathcal{D}_f$.

- Étudier $g : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et dresser son tableau de variations.
- En déduire le tableau de variations de f .

Exercice 27

Lorsque la queue d'un lézard casse, elle repousse toute seule en une soixantaine de jours.

Lors de la repousse, on modélise la longueur, en centimètre, de la queue du lézard en fonction de la durée, en jour, par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$f(x) = 10e^{u(x)}$ où u est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $u(x) = -e^{-2-\frac{x}{10}}$.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Vérifier que pour tout réel $x \geq 0$,

$$f'(x) = -u(x)e^{u(x)}.$$

En déduire le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.

2. (a) Calculer $f(20)$.

En déduire une estimation de la longueur, en cm, de la queue du lézard après 20 jours de repousse. *Arrondir au dixième.*

(b) Selon cette modélisation, la queue du lézard peut-elle mesurer 11 cm ?

3. On se propose de déterminer au bout de combien de jours la vitesse de croissance est maximum.

On admet que la fonction dérivée f' est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on note f'' la fonction dérivée de f' .

- (a) Vérifier que pour tout réel $x \geq 0$,

$$f''(x) = \frac{1}{10}u(x)e^{u(x)}(1 + u(x)).$$

(b) Étudier les variations de f' sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

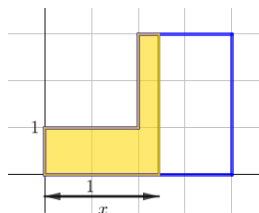
(c) En déduire au bout de combien de jours la vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximum.

2 Continuité sur un intervalle

Exercice 28

Pour $x \in [0; 4]$, $f(x)$ est l'aire de la partie colorée sur la figure ci-contre.

La fonction f est-elle continue en 2 ?



Exercice 29

Représenter graphiquement les trois fonctions définies ci-dessous et utiliser le graphique pour conjecturer leur continuité.

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 1 \\ 2x - 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$
2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x & \text{si } x > 2 \end{cases}$
3. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ h(0) = 1 \end{cases}$

Exercice 30

Soit f la fonction définie sur $] -\infty; -1[\cup] -1; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + 1 - \frac{1}{x+1}$.

1. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère.
2. Montrer que la fonction f est continue sur les intervalles $] -\infty; -1[$ et $] -1; +\infty[$.

Exercice 31

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1}{x+2} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

2. Étudier la continuité de la fonction f :

- (a) sur l'intervalle $] -\infty; -1[$;
- (b) sur l'intervalle $] -1; +\infty[$;
- (c) en -1

Que peut-on conclure ?

Exercice 32

Étudier la continuité de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = E\left(\frac{x}{x+1}\right),$$

E désignant la fonction partie entière.

Et sur $] -\infty; -1[$? Et sur $] -1; 0[$?

Exercice 33

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par ;

$$f(x) = xE(x),$$

où $E(x)$ est la partie entière de x . Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 34

Soit f la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{si } x \neq -1 \\ g(-1) = m \end{cases}$$

Peut-on choisir un réel m pour que g soit continue sur $\mathbb{R}$?

3 Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Exercice 35

On donne ci-dessous le tableau de variations de f .

On pourra répondre aux questions sans justification.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	2	-1	$+\infty$

1. Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?
2. Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -5$?

Exercice 36

On donne ci-dessous le tableau de variations de f .

Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$?

Justifier le résultat.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	-3	0

Exercice 37

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - x^2$, et $\mathcal{C}'$ la courbe représentative de la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x}$. Quel est le nombre de points d'intersections de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$? Justifier.

Exercice 38

f est la fonction définie par $f(x) = x^7 - 9$.

1. Déterminer, de tête, le sens de variation de f .
2. Avec la calculatrice, on a obtenu le tableau de valeurs ci-contre.
Donner un encadrement à 0,001 près d'une solution de l'équation $f(x) = 0$.

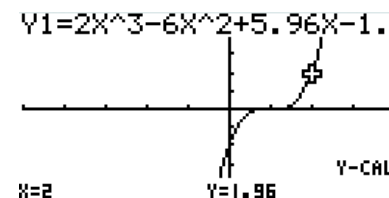
X	Y1
1.362	-.3056
1.363	-.2608
1.364	-.2158
1.365	-.1707
1.366	-.1253
1.367	-.0797
1.368	-.0339
1.369	.01206
1.37	.05824
1.371	.10463
1.372	.15122

Exercice 39

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5,96x - 1,96$$

1. On a tracé ci-contre la courbe représentative de f .
Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
Puis donner une valeur approchée des solutions éventuelles.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
La conjecture précédente est-elle confirmée ?
3. (a) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout réels x ,



$$f(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$$

- (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 40

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$.

1. Développer l'expression $(x-1)^2(x-3)$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 1$.
3. On admet que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
Donner, en le justifiant, le tableau de variations de f .
4. En utilisant le tableau de la question précédente, donner, suivant les valeurs de k , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.
On pourra ne pas justifier.

Exercice 41

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$$

Déterminer, selon les valeurs de k , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-2; 2]$ par :

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$$

Déterminer les valeurs du réel $k > 0$ pour que l'équation $f(x) = k$ admette au moins une solution.

Exercice 42

On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{x} + 1 - \sqrt{x}$.

1. On admet que $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$.
Expliquez le avec vos mots.
2. Donner le tableau de variation de h .
3. En déduire que l'équation $\frac{1}{x} + 1 = \sqrt{x}$ a une solution unique α dans $]0; +\infty[$.

4. Calculer $h(2)$ et $h(3)$ et justifier que $2 < \alpha < 3$.
5. Calculer $h(2,5)$ et en déduire un encadrement de α d'amplitude 0,5.
La méthode qui consiste à passer d'un encadrement de α d'amplitude 1 à un encadrement de α d'amplitude 0,5 s'appelle la méthode de dichotomie.
6. En reprenant le raisonnement de la question précédente, déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,25.
7. Écrire un algorithme permettant de répéter la méthode de dichotomie de façon à obtenir un encadrement de α d'amplitude inférieure à 0,01 puis d'amplitude inférieure à 0,001.

Exercice 43

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2(x-2)\sqrt{x} + 1$$

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions a et b .
2. Déterminer des valeurs approchées de a et b à 10^{-2} près.

Exercice 44 - Vrai/Faux

Justifier la réponse.

Soit f une fonction dont le tableau des variations est :

x	$-\infty$	-1	0	1	2	4	$+\infty$
$f(x)$	1 ↘ 0 ↘ -∞		∞	0 ↘ -3		0 ↗ 1	1

1. L'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution.
2. L'équation $f(x) = -3$ admet une unique solution.
3. L'image par f de l'intervalle $]0; 4]$ est l'intervalle $[0; +\infty[$.

4. Le signe de f est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$	-2	0	1	4	$+\infty$
$f(x)$	+ 0 -			+ 0 - 0 +		

Exercice 45 - Algorithmique

Soit l'équation $(E) : x^3 - 5x = 3$.

1. Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution dans l'intervalle $[-1; 0]$.
2. On souhaite obtenir un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution. Après avoir analysé l'algorithme ci-dessous, compléter les pointillés de façon à résoudre le problème.

```

Variables :
     $x, y$  réels
Début
     $x \leftarrow -1$  ;  $y \leftarrow x^3 - 5x$ ;
    TantQue  $y > 3$  Faire
         $x \leftarrow \dots$ 
         $y \leftarrow \dots$ 
    FinTantQue ;
    Afficher( $x - 0,01; x$ )
Fin

```

3. L'équation (E) admet-elle des solutions n'appartenant pas à $[-1; 0]$? Justifier.
Si oui, pour chaque solution, modifier l'algorithme précédent de façon à en obtenir un encadrement d'amplitude 10^{-2} .

Exercice 46

Soit f une fonction dont le tableau des variations est :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x)$	1	2	$-\infty$	1

1. Donner les images par f des intervalles :
 $] -\infty; 0[$; $[0; 2[$; $] -\infty; 2[$; $] 2; +\infty[$.
2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = 0$ puis $f(x) = 1$.

Exercice 47

Dans un récipient cylindrique de rayon 10 cm, on place une bille de rayon 4 cm.

On verse ensuite de l'eau jusqu'à recouvrir exactement la bille.

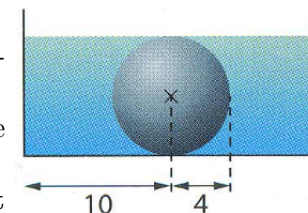
On retire alors la bille, et on la remplace par une autre bille de rayon R (où R est différent de 4).

Est-il possible que l'eau recouvre exactement la nouvelle bille ?

1. Calculer le volume d'eau versé dans le récipient.
2. À quel intervalle doit appartenir R ?
3. En calculant de deux façons le volume « eau+bille », démontrer qu'une nouvelle bille est solution du problème si son rayon R vérifie l'équation :

$$x^3 - 150x + 536 = 0$$

4. Justifier que le problème admet une solution.
Donner une valeur approchée du rayon R à 0,1 près.



Exercice 48

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^4 + 2x^3 + 3x + 1$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. (a) Étudier les variations de f' .
(b) Justifier que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
(c) En déduire le tableau de signes de f' .
3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 49 - Quelle méthode ?

Soit l'équation (E) $\frac{1}{x} = x - 2$ où $x \in]0; +\infty[$.

1. Un élève a représenté sur sa calculatrice l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ et la droite d'équation $y = x - 2$.

Au vu du graphique, combien l'équation (E) semble-t-elle admettre de solutions dans $]0; +\infty[$?



2. Un deuxième élève considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - 2 - \frac{1}{x}$.
(a) Dresser le tableau de variations de g sur $]0; +\infty[$.
(b) En déduire le nombre de solutions de l'équation (E) et en donner, **à l'aide de la calculatrice**, un encadrement d'amplitude 10^{-2} .
3. Un troisième élève dit « Je peux résoudre l'équation (E) algébriquement ». Justifier que ce troisième élève a raison.

4 Prendre des initiatives

Exercice 50

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 5}{x^2 + x - 2}$$

Le professeur demande de calculer $f(1000)$, $f(10000)$.

Claudine répond très rapidement :

« $f(1000) = 998$ et $f(10000) = 9998 \dots$ à très peu de choses près. »

Claudine a-t-elle raison ? Justifier et estimer l'erreur commise par Claudine.

Exercice 51

1. Soit un entier $n \geq 2$.
Montrer que l'équation $x + x^2 + \dots + x^n = 1$ a une unique solution a_n dans $[0; 1]$.
2. Montrer que la suite (a_n) converge vers une limite l dans $[0; 1]$.
Déterminer la valeur de l .

Exercice 52

Un chien est attaché au bout d'une laisse elle-même attachée à un coin d'une maison rectangulaire de côtés 14 m et 6 m.

On note x la longueur de la laisse et on note $P(x)$ le périmètre de la surface que peut parcourir le chien.

1. Exprimer $P(x)$ lorsque x est compris entre :
 - (a) 0 et 6 m
 - (b) 6 m et 14 m
 - (c) 14 m et 20 m
2. Représenter la fonction P sur $[0; 20]$.

Exercice 53 - En théorie du signal

La fonction de Heaviside, notée H , et la fonction « porte », notée Π , sont deux fonctions couramment utilisés en physique, par exemple en théorie du signal. Elles sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \geq 0 \\ 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \Pi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |x| > \frac{1}{2} \\ 1 & \text{pour } |x| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

1. (a) Représenter graphiquement ces fonctions sur un logiciel de géométrie.
- (b) Sur quels intervalles, les plus grands possibles, la fonction H semble-t-elle continue? Dérivable?
- (c) Même question pour Π .
2. On considère la fonction T définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$T(x) = H(2 - x) - H(1 - x)$$

- (a) Représenter graphiquement la fonction T .
- (b) Déterminer deux réels a et b tels que :

$$T(x) = \Pi(ax + b)$$

Exercice 54

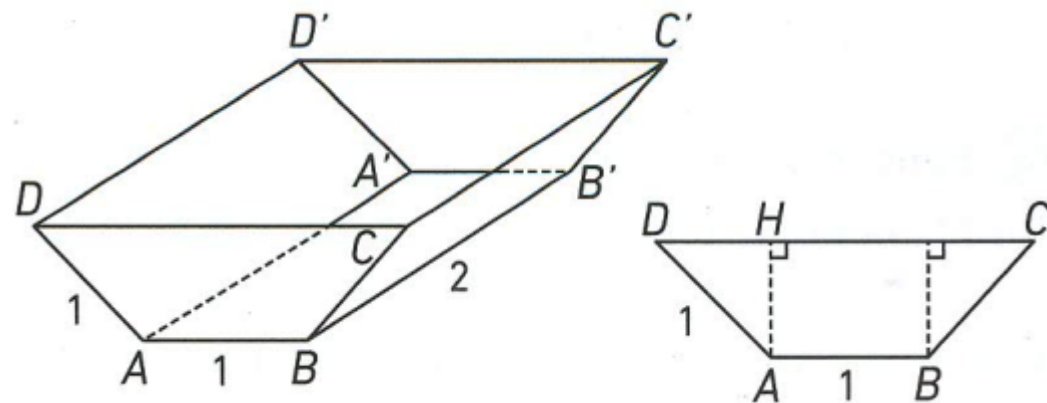
Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (u(x))^n$, n entier naturel non nul.

Comparer le sens de variation de f à celui de u .

Exercice 55

Un abreuvoir, représenté ci-dessous, a la forme d'un prisme droit dont la base est un trapèze isocèle $ABCD$.

Toutes les dimensions sont fixées, sauf la longueur CD . L'unité est le mètre.

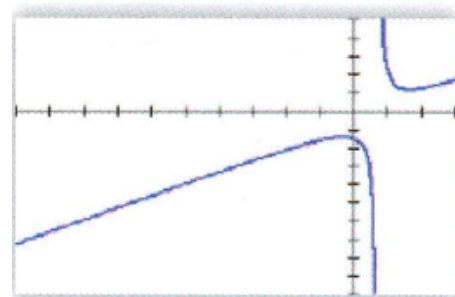


Déterminer la dimension à donner à la grande base $[CD]$ du trapèze afin que le volume du récipient soit maximal.

Exercice 56

On a affiché ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 3}{3x^2 + x - 2} \text{ ainsi que son tableau de valeurs.}$$



X	Y1
-8	-5.962
-7	-5.304
-6	-4.65
-5	-4
-4	-3.357
-3	-2.727
-2	-2.125
-1	ERREUR
0	-1.5
1	2
2	1.25

Le tableau de valeurs est-il cohérent avec la courbe?
Comment peut-on l'expliquer?