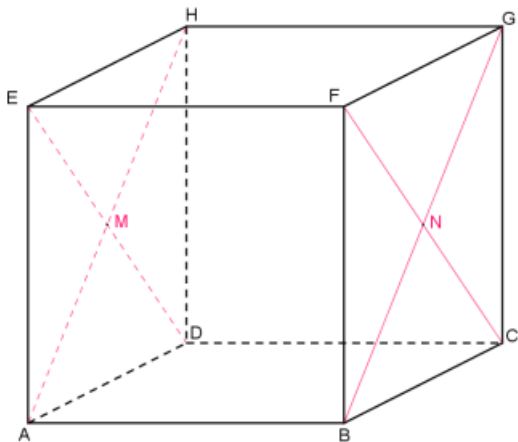


1 Positions relatives de droites et de plans

Exercice 1 - QCM

On considère un cube ABCDEFGH.
Sur la représentation du cube en perspective cavalière ci-dessous, on a dessiné le point M, centre du carré ADHE, et le point N, centre du carré BCGF.



Partie A

Pour chaque proposition, dire si elle vous semble vraie ou fausse, en cochant une des cases.

(AB) et (EH) sont coplanaires	☐ vrai	☐ faux
(AH) et (DG) sont sécantes	☐ vrai	☐ faux
(AN) et (EN) sont coplanaires	☐ vrai	☐ faux
(AB) et (GF) sont parallèles	☐ vrai	☐ faux
(DG) et (EM) sont sécantes	☐ vrai	☐ faux
(BH) et (NA) sont coplanaires	☐ vrai	☐ faux

Partie B

Compléter le tableau ci-dessous, en indiquant l'ensemble d'intersection des deux plans.

Intersection $\leftrightarrow$	$\emptyset$	un point	une droite	un plan
(HGF) et (FGC)	☐	☐	☐	☐
(EGH) et (FBH)	☐	☐	☐	☐
(MEH) et (FBN)	☐	☐	☐	☐
(MDH) et (HEA)	☐	☐	☐	☐
(HGA) et (EFD)	☐	☐	☐	☐
Même consigne, cette fois en indiquant l'ensemble d'intersection de la droite et du plan				
(AE) et (BGH)	☐	☐	☐	☐
(DM) et (DCG)	☐	☐	☐	☐
(EF) et (HGF)	☐	☐	☐	☐
(AC) et (EFG)	☐	☐	☐	☐

Exercice 2

ABCDEFGH est un pavé droit et les points I et J sont les milieux respectifs des segments [EF] et [FG].

- Démontrer que les droites (IJ) et (AC) sont parallèles.
- Déterminer l'intersection des plans (BIJ) et (ABC).

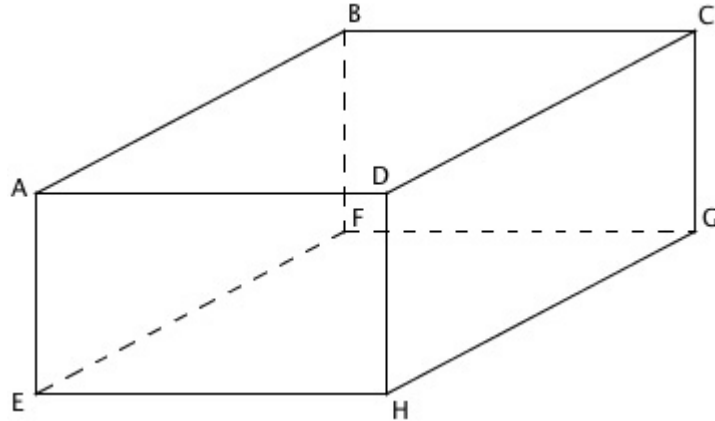
Exercice 3

Dans un tétraèdre ABCD, I est le milieu de [AB], J et K sont les centres de gravité respectifs des triangles ABD et ABC.

- Faire une figure.
- Démontrer que les points C, D, I, J et K sont coplanaires.
- Quelle est la nature du quadrilatère CKJD ?
- Justifier que les droites (CJ) et (DK) sont sécantes.

Exercice 4

On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH :



1. Citer deux couples de droites orthogonales.
2. Montrer que les droites (AB) et (CG) sont orthogonales.

Exercice 5

On considère un cube ABCDEFGH.

Montrer que la droite (BD) est orthogonale au plan (AEC).

Exercice 6

ABCD est un tétraèdre régulier (dont les arêtes sont de même longueur).

G est le centre de gravité du triangle ABC,

I est le milieu de [BC] et J est le milieu de [AB].

1. Démontrer que A et D appartiennent au plan médiateur de [BC].
2. Qu'en déduit-on pour les droites (AD) et (BC) ?
3. Démontrer que la droite (DG) est orthogonale au plan (ABC).

2 Vecteurs de l'espace et caractérisations vectorielles

2.1 Vecteurs de l'espace

Exercice 7 - Construire un point défini par une égalité vectorielle

On considère un cube ABCDEFGH représenté ci-contre.

Construire les points M et N tels que :

1. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG}$;
2. $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{GF}$.

Exercice 8 - Montrer que des vecteurs sont colinéaires

On considère un tétraèdre ABCD.

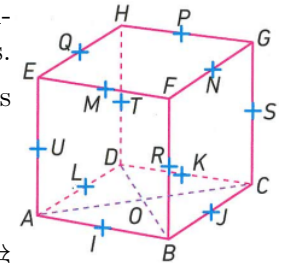
1. Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$.
2. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.

Exercice 9

Partie A

ABCDEFGH est un cube sur lequel on a placé les milieux de chaque arête et le centre O de la face de dessous.

1. En utilisant les points de la figure, citer des vecteurs égaux à $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{JR}$, $\overrightarrow{TS}$ et $\overrightarrow{ON}$.
2. Compléter en utilisant les points de la figure :
 - a) $\overrightarrow{A...} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AU}$
 - b) $\overrightarrow{I...} = \overrightarrow{IK} + \overrightarrow{JN} + \overrightarrow{HE}$
 - c) $\overrightarrow{S...} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{CO}$
 - d) $\overrightarrow{B...} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{BE}$



Partie B

On construit maintenant les points Z tel que $\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ et Y tel que $\overrightarrow{BY} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$.

1. Que dire des points I, U et Z ?
Justifier en exprimant $\overrightarrow{IZ}$ puis $\overrightarrow{IU}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AE}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{ZY} = \overrightarrow{BC}$.
Quelle est la nature du quadrilatère ZBCY ?

Exercice 10

SABCD est une pyramide à base carrée de sommet S. Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [DA].

M est le point tel que $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SD} + 3\overrightarrow{CJ}$.

On veut montrer que les points M, I et J sont alignés.

1. Réaliser une figure.
2. Montrer que $\overrightarrow{DM} = 3\overrightarrow{CJ}$, puis que $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CJ}$.
3. En déduire que $\overrightarrow{JM} = 2\overrightarrow{JI}$.
4. Conclure.

Exercice 11 - difficile

Soit ABCD un tétraèdre, I le point défini par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

J et K sont les milieux respectifs des segments [CD] et [IJ]. La droite (AK) coupe le plan (BCD) en L.

1. Déterminer les coordonnées du point L dans le repère (B; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BD}$) du plan (BCD).
2. Vérifier que les points B, L et J sont alignés.

2.2 Caractérisations vectorielles, vecteurs coplanaires

Exercice 12 - Utiliser la caractérisation vectorielle d'une droite

Soient M, N et P trois points de l'espace, non alignés. On considère les points I et J tels que :

$$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{NJ} = 3\overrightarrow{MP} - 2\overrightarrow{MN}$$

1. Faire une figure.
2. Montrer que le point P appartient à la droite (IJ).

Exercice 13 - Utiliser la caractérisation vectorielle d'un plan

On considère un tétraèdre ABCD.

Soit M le point tel que $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$.

Montrer que le point M appartient au plan (ABC).

Exercice 14

Dans un tétraèdre SABC, à quel plan particulier le point M tel que $\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AC}$ appartient-il ?

Le démontrer.

Exercice 15

Soit SABCD une pyramide à base carrée ABCD.

La droite passant par le point D et de vecteur directeur $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DS}$, et la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AS}$ sont-elles sécantes ?

Indication : On pourra introduire les milieux J et K des segments [SC] et [SB].

Exercice 16

Soit SABCD une pyramide à base carrée ABDC.
Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments [SA], [SB] et [BD].

Identifier les ensembles de points suivants :

- $\mathcal{E}_1$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{JM} = t\overrightarrow{SD}, \quad t \in \mathbb{R}$$

- $\mathcal{E}_2$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM} = u\overrightarrow{IJ}, \quad u \in [0; 2]$$

- $\mathcal{E}_3$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{SA}, \quad k \in \mathbb{R}$$

- $\mathcal{E}_4$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{SB} + y\overrightarrow{SC}, \quad x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}$$

Exercice 17

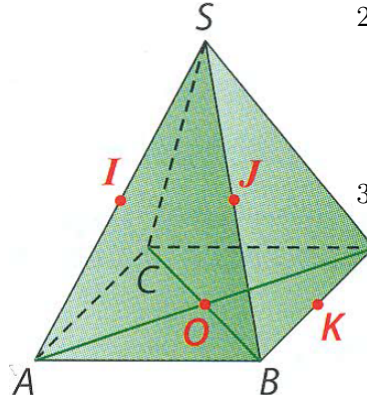
ABCD est un tétraèdre.

I et K sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].

Les points J et L sont définis par :

$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

1. Les points I, J, K et L sont-ils coplanaires ?
2. Préciser la section du tétraèdre par le plan (IJK).



Exercice 18

1. Dans le prisme ci-contre, I est le milieu de [BE].

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CI}$, $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

2. On considère un tétraèdre ABCD.

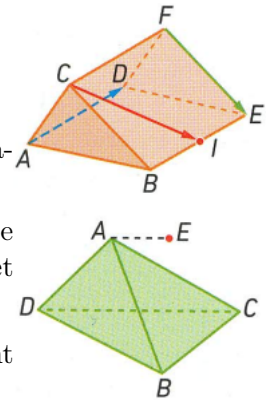
E est le point de l'espace tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$.

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

3. Dans un pavé droit PAVEDROI, M est le milieu de [DP] et N celui de [VO]. S est le milieu de [PI] et T celui de [IA].

(a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{IR}$ sont coplanaires.

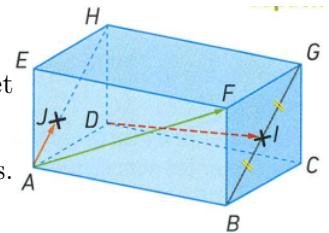
(b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{ST}$, $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{EA}$ sont coplanaires.



Exercice 19 - Montrer que des vecteurs sont coplanaires

Dans le pavé droit suivant, J est tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AH}$ et I est le milieu de [BG].

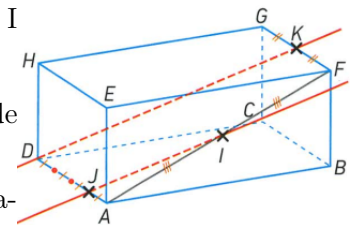
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{DI}$, $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont coplanaires.



Exercice 20 - Montrer que des droites sont parallèles

Dans le pavé droit suivant, J est tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, I est le milieu de [AF] et K est le milieu de [FG].

1. Exprimer $\overrightarrow{JI}$ puis $\overrightarrow{DK}$ en fonction de $\overrightarrow{DA}$ et de $\overrightarrow{AK}$.
2. En déduire que les droites (JI) et (DK) sont parallèles.



Exercice 21

On considère un pavé droit ABCDEFGH représenté ci-contre.

On note I et J les milieux respectifs des côtés [GH] et [FG].

Montrer que les vecteurs $\vec{IJ}$, $\vec{FD}$ et $\vec{DH}$ sont coplanaires.

Exercice 22 - Montrer à l'aide des coordonnées si des vecteurs sont coplanaires ou non

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère un pavé droit OBCDEFGH avec $B(1; 3; 1)$, $C(-1; 2; 3)$, $D(-2; -1; 2)$ et $E(2; -1; 1)$.

M est le point de l'espace tel que $\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{OF}$.

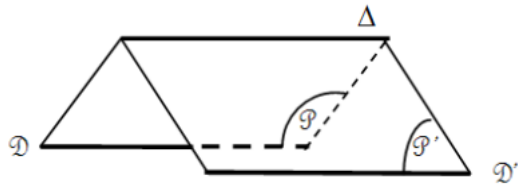
1. Conjecturer à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique si les vecteurs $\vec{OM}$, $\vec{DF}$ et $\vec{DC}$ sont coplanaires ou non.
2. Démontrer cette conjecture.

Exercice 23 - Démonstration

On veut démontrer le théorème du toit.

Soient deux plans sécants $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

Si une droite d de $\mathcal{P}$ est parallèle à une droite d' de $\mathcal{P}'$, alors la droite d'intersection Δ de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est parallèle à d et d' .



Soient $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ et $\vec{v}$ un vecteur directeur de d .

1. Expliquer pourquoi $\vec{v}$ est aussi un vecteur directeur de d' .
2. On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Montrer alors que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.
3. En déduire une démonstration du théorème du toit.

3 Repérage

3.1 Repères de l'espace

On se place dans un repère de l'espace.

Exercice 24

Soient les points $A(1; 2; 4)$, $B(-2; 3; 6)$, $C(-3; -2; 2)$ et $D(-6; -1; 4)$.

Démontrer que ces points sont les sommets d'un parallélogramme.

Exercice 25

Soient les points $A(2; -5; 1)$, $B(-1; 2; 4)$, $C(3; 4; -1)$ et $D(-2; 3; 2)$.

Soient I et J les milieux respectifs des segments [BD] et [AC], et G le centre de gravité du triangle ABC.

Soit le point K défini par $\vec{DK} = \frac{3}{4}\vec{DG}$.

1. Déterminer les coordonnées des points I, J, G et K.
2. Justifier que le point K appartient au segment [IJ].
On précisera sa position sur ce segment.

Exercice 26 - Décomposer un vecteur en fonction de trois vecteurs non coplanaires

On considère un cube ABCDEFGH de centre O.

I est le milieu de [FG].

1. Justifier que les vecteurs $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AD}$ et $\vec{w} = \vec{AE}$ ne sont pas coplanaires.
2. Exprimer les vecteurs donnés ci-dessous en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
a) $\vec{AG}$ b) $\vec{BH}$ c) $\vec{DI}$

Exercice 27 - Déterminer les coordonnées de vecteurs

On considère un pavé droit ABCDEFGH.

On note I le milieu du côté [GH], J le point tel que $\overrightarrow{EJ} = \frac{4}{3}\overrightarrow{EF}$ et O le milieu du segment [AG].

1. Justifier que $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère de l'espace.
2. Donner sans justifier les coordonnées des points A, B, D et E.
3. Déterminer les coordonnées des points G, H, I, J et O.
4. Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants :
a) $\overrightarrow{GJ}$ b) $\vec{u} = 2\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{HB}$

3.2 Montrer la colinéarité de deux vecteurs

Exercice 28

Les questions sont indépendantes

1. Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}+1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 3+2\sqrt{2} \\ 4+2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?
Si oui, préciser la valeur de k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.
2. Les points A(3 ; 10 ; -1), B(117 ; 49 ; -76) et C(-35 ; -3 ; 24) sont-ils alignés ?
3. On considère les points E(-4 ; 1 ; 5), F(2 ; 3 ; -1), G(5 ; 7 ; 3) et H(2 ; 6 ; 6).
Les droites (EF) et (GH) sont-elles parallèles ?

Exercice 29

Soient les points A(0 ; 1 ; 3), B(-3 ; 0 ; -1) et C(-2 ; -3 ; -3).

I est le milieu du segment [AC].

G est le centre de gravité du triangle ABC, K est le point défini par :

$$\overrightarrow{BK} = 4\overrightarrow{BI}$$

Démontrer que les points B, G et K sont alignés.

3.3 Montrer la coplanarité de vecteurs ou de points

Exercice 30

Soient les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ -18 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que :

$$\begin{cases} 4a + b &= 5 \\ 2a - 3b &= 13 \\ -3a + 4b &= -18 \end{cases}$$

2. On a résolu le système précédent à l'aide du logiciel Xcas :

`resoudre([4a+b=5,2a-3b=13,-3a+4b=-18],[a,b])`

(2 -3)

Après avoir interprété et justifié le résultat obtenu, dire si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.