

1 Rappels sur les suites numériques

1.1 Définir une suite

Exercice 1

Exprimer chacune des suites de nombres suivante grâce à une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Peut-on donner le 100^{ème} terme de chacune de ces suites sans écrire tous les termes précédents ?

- 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49
- 1 ; 4 ; 7 ; 10 ; 13 ; 16 ; 19
- 3 ; 6 ; 12 ; 24 ; 48 ; 96
- 5 ; -4 ; 6 ; -3 ; 7 ; -2 ; 8

Exercice 2

On considère la suite dont les premiers termes sont 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21.
Pourriez-vous exprimer un terme en fonction des précédents ?

Exercice 3

Modéliser chacune des situations suivantes grâce à une suite

- Margaux a 10 ans ; ses parents lui donnent 10 € d'argent de poche par mois. Tous les ans, ils augmentent cette somme de 2 € par mois.
- La population de bactéries double toutes les 20 minutes. Son premier relevé dénombre 1500 bactéries. Quel est le nombre de bactéries au $n^{\text{ème}}$ relevé ?
- La population d'une ville augmente de 5% par an dû aux naissances et décès. De plus, avec les mouvements de population, 4000 nouveaux habitants s'y installent chaque année.

Exercice 4

Calculer dans chacun des cas les cinq premiers termes de la suite u définie par :

- $u_n = \frac{n+1}{n^2+1}$ pour tout $n \geq 0$
- $u_n = \frac{2^n}{n^2}, n \geq 1$

- $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = -3u_n + 2$ pour tout $n \geq 0$
- $u_1 = -2$ et $u_{n+1} = (u_n)^2 + 5u_n - 1$ pour tout $n \geq 0$
- $u_n = \sqrt{n}$ pour tout $n \geq 0$

Déterminer la fonction f telle que $u_n = f(n)$ ou $u_{n+1} = f(u_n)$. On pourra vérifier ses calculs à l'aide de la calculatrice (tableau de valeurs en mode explicite ou récurrent, attention aux valeurs approchées !)

Exercice 5

- Quelles sont les valeurs affichées par le programme ci-contre ?
- Ces valeurs sont les premiers termes d'une suite u définie sur $\mathbb{N}$. Exprimer, pour tout entier naturel n , u_n en fonction de n .
- Déterminer une fonction f définie sur $[0; +\infty[$ telle que pour tout entier naturel n , $u_n = f(n)$.

```
1| from math import*
2|
3| n=input("n=")
4| n=int(n)
5| for k in range(n):
6|     u=k**2/2-5
7|     print(u)
8|     k=k+1
```

Exercice 6

Reprendre les questions précédentes, cette fois avec l'algorithme suivant, où u_{n+1} s'exprime en fonction de u_n et f vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$.

```
from math import*
n=input("n=")
n=int(n)
u=100
print(u)
for k in range(1,n):
    u=-0.5*u+5
    print(u)
    k+=1
```

1.2 Travailler les indices

Exercice 7

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = -3n + 5$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donner l'expression en fonction de n de :

$$u_{n+1} ; u_n + 1 ; u_{2n} ; u_{n^2} ; u_{2n+1}$$

Exercice 8

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{4^{n+1}}{3^n}$.

1. Calculer ses cinq premiers termes.
2. Exprimer, en fonction de n , u_{n+1} ; $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\frac{u_{2n}}{(u_n)^2}$
3. Mêmes questions avec v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{5^n}{2^{n+1}}$.

Exercice 9

On considère la suite u définie par $u_n = 7 - 3n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3 .
2. Montrer que la suite u vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n - 3$.

1.3 Représenter graphiquement une suite

Exercice 10

v est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = n^2 + 2n - 3$.

1. Déterminer la fonction polynôme de degré 2 telle que pour tout entier naturel n , $v_n = f(n)$.
2. Dans un repère, tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
3. Placer sur le graphique les cinq premiers points de la représentation graphique de v .
4. Vérifier avec la calculatrice.

Exercice 11

On considère la suite u définie par récurrence tel que pour tout entier non nul $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} + 2$. On suppose que $u_0 = 1$.

1. Déterminer la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé. Déterminer graphiquement les premiers termes de la suite.
3. Mêmes questions avec $u_0 = 16$.

Exercice 12

On considère la suite v définie par $v_0 = 5$ et pour tout entier naturel non nul $v_{n+1} = 3 - \frac{v_n}{2}$.

- a. Déterminer la fonction f telle que $v_{n+1} = f(v_n)$.
- b. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé puis représenter graphiquement les termes de la suite.

1.4 Suites arithmétiques

Exercice 13

1. u est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .
 - (a) On suppose que $r = -5$ et $u_0 = 1$. Calculer u_1, u_2 et u_{100} .
 - (b) On suppose que $r = 2$ et $u_1 = 1$. Calculer u_2 et u_7 .
 - (c) On suppose que $u_0 = -3$ et $u_9 = 15$. Déterminer r puis le 15^{ème} terme.
 - (d) On suppose que $u_1 = 13$ et $u_2 = 17$. Calculer u_0 et u_5 .
 - (e) On suppose que $u_2 = 3$ et $u_7 = -12$. Déterminer le 1^{er} terme de la suite.
2. v est la suite arithmétique de raison $r = -2$ telle que $v_0 = 12$.
 - (a) Dans un repère, construire les cinq premiers points de la représentation graphique de v .
 - (b) Ces points appartiennent à une droite $\mathcal{D}$. En donner une équation.

Exercice 14

La suite u est arithmétique de raison $-0,4$ et telle que $u_{27} = -8,7$.

1. Calculer le terme initial u_0 .
2. Exprimer u_n en fonction de n .
3. Donner le sens de variation de u ainsi que sa limite.

Exercice 15 - Arithmétique ou non

Les suites ci-dessous, définies explicitement, sont-elles arithmétiques ?

1. $u_n = \frac{1}{5}n - 4, n \in \mathbb{N}$.
2. $v_n = \frac{2-n}{n+3}, n \in \mathbb{N}$.
3. $w_n = 2(n+1)^2 - 2n^2, n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16

1. 50 personnes se réunissent pour Noël. Tout le monde se sert la main une seule fois. Combien de poignées de mains ont été échangées ?
2. La suite u est arithmétique de terme initial $u_1 = -50$ et de raison $r = 0,1$. Calculer $u_1 + u_2 + \dots + u_{12}$ puis $u_{100} + u_{101} + \dots + u_{200}$.
3. Calculer la somme des multiples de 3 compris entre 1000 et 2000.
4. La suite u est arithmétique de raison $\frac{1}{3}$ et telle que $u_0 + u_2 + \dots + u_{10} = \frac{143}{6}$. Calculer u_0 puis en déduire u_n en fonction de n .

1.5 Suites géométriques

Exercice 17

1. Pour chacune des suites géométriques considérées, calculer v_1, v_2 et v_3 .
 - (a) $v_0 = 1$ et $q = 5$.
 - (b) $v_0 = -2$ et $q = 3$.
 - (c) $v_0 = -8$ et $q = 0,5$.
 - (d) $v_0 = 16$ et $q = 1,5$.
2. v est une suite géométrique de raison q et de premier terme v_0 .
 - (a) On suppose que $q = 2$ et $v_0 = 3$. Calculer v_{11} .
 - (b) On suppose que $q = -5$ et $v_1 = 1$. Calculer v_5 .
 - (c) On suppose que $v_0 = 3$ et $v_4 = \frac{1}{27}$. Calculer q .

Exercice 18

On considère la suite géométrique u définie pour $n \in \mathbb{N}$ telle que $u_4 = 48$ et $u_7 = 384$.

1. Déterminer sa raison q et en déduire le premier terme de la suite.
2. Exprimer u_n en fonction de n . En déduire la valeur de u_{17} .

Exercice 19

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_n = \frac{3^{n+2}}{4}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

Exercice 20

1. Calculer $S = 4 + 16 + 64 + 256 + 1024 + 4096 + 6384 + 65536 + 262144$.
2. On considère la suite géométrique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de premier terme $v_0 = 4$ et de raison $q = 3, 7$.
Calculer $S = v_0 + v_1 + \dots + v_6$.
3. Trois nombres sont les termes consécutifs d'une suite géométrique.
Leur produit est $\frac{8}{27}$ et leur somme $\frac{26}{9}$. Déterminer ces trois nombres.

Exercice 21

À la suite d'un héritage, Monsieur Lievrek dispose d'une somme de 50 000 000 FCFA qu'il désire faire fructifier.

La banque lui propose deux types de placements :

- Type A : Le capital est augmenté chaque année de 2 000 000 FCFA.
- Type B : Le capital est augmenté de 2,5 % du montant du capital de l'année précédente.

1. Modélisation

Placement A

On note u_n le capital en francs disponible à la fin de la n -ième année de placement.

- (a) Démontrer que la suite u est arithmétique.
- (b) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n .

Placement B

On note v_n le capital en euros disponible à la fin de la n -ième année de placement.

- (a) Démontrer que la suite v est géométrique.
- (b) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n en fonction de n .

2. Comparaison des deux placements

À l'aide d'un tableur ou de la calculatrice, déterminer le placement le plus avantageux pour M. Lievrek en fonction de l'année où il retire son capital.

Exercice 22

Un nénuphar pousse en doublant chaque jour sa surface. Un beau jour il éclot au centre d'une mare circulaire de 50m de rayon, il a la forme d'un disque de 2cm de rayon. On notera $\mathcal{A}_n$ l'aire de la surface recouverte par le nénuphar au bout de n jours.

1. Déterminer en combien de jours le nénuphar occupera toute la mare.
2. Soit $\mathcal{R}_n$ le rayon du nénuphar. Exprimer $\mathcal{R}_n$ en fonction de n .

Exercice 23

Un auteur arabe, Al-Séphadi, raconte que Sessa, ayant inventé le jeu d'échecs, fut présenté à son maître le roi de Perse. Pour le récompenser, celui-ci promit de lui accorder ce qu'il désirait. Sessa demanda qu'il lui fut donné un grain de blé pour la première case du jeu, 2 pour la deuxième, 4 pour la troisième et ainsi de suite, jusqu'à la dernière case du jeu (comptant 64 cases).

1. Combien de grains seront nécessaires pour que le roi de Perse puisse accéder à cette demande ?
2. Un grain pèse en moyenne 0,05g. Combien faut-il de bateaux de 10 000 tonnes pour transporter le blé ?

2 Raisonnement par récurrence

Exercice 24

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 25

Démontrer que pour tout entier naturel n , $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.

Exercice 26

On considère un réel a positif.

Démontrer que pour tout entier naturel n : $(1+a)^n \geq 1+na$.

Exercice 27

On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3$$

Après avoir calculé les premiers termes, conjecturer une formule explicite pour u_n , puis la démontrer.

Exercice 28

Démontrer que le nombre de cordes reliant n points distincts d'un cercle ($n \geq 2$) est égal à $\frac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 29

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

2. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$$

Exercice 30

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$n! \geq 2^{n-1}$$

Exercice 31

Pour tout entier $n \geq 1$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n$.
Démontrer que pour tout entier n , la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'_n(x) = nx^{n-1}$.

Exercice 32

On considère la suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$$

Démontrer que la suite u est minorée par 1 et est décroissante.

Exercice 33

On considère la suite u définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_{n+1} = 4u_n - 3u_{n-1}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n > 0$: $u_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

Exercice 34

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et pour tout entier n : $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4x - 2}{x + 1}$$

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier n , $u_n > 2$.

3. La suite u est-elle monotone ?

Exercice 35 - Vrai ou Faux ?

On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 et pour tout entier n :

$$u_{n+1} = 3u_n + 1$$

1. La proposition « $u_n \leq u_{n+1}$ » est héréditaire.
2. La proposition « $u_n \geq u_{n+1}$ » est héréditaire.
3. Si $u_0 = 1$, alors la suite u est croissante.
4. Si $u_0 = -2$, alors la suite u est décroissante.
5. Si $u_0 = -0,5$, alors la suite u est stationnaire.

Exercice 36 - QCM

1. Pour tout entier n , on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $6^n - 1$ est un multiple de 5 » .
 - (a) La proposition $\mathcal{P}$ est héréditaire.
 - (b) La proposition $\mathcal{P}$ est vraie sur $\mathbb{N}$.
 - (c) Il existe un entier n tel que $\mathcal{P}(n)$ est fausse.
2. Pour tout entier n , on considère la proposition $\mathcal{Q}(n)$: « $6^n + 1$ est un multiple de 5 » .
 - (a) La proposition $\mathcal{Q}$ est héréditaire.
 - (b) La proposition $\mathcal{Q}$ est vraie sur $\mathbb{N}$.
 - (c) Il existe un entier n tel que $\mathcal{Q}(n)$ est fausse.

3 Exercices supplémentaires

Exercice 37

Dans un repère orthonormé, pour tout entier naturel n , on définit les points M_n par leurs coordonnées $(x_n ; y_n)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 4 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{n+1} = 0,8x_n - 0,6y_n \\ y_{n+1} = 0,6x_n + 0,8y_n \end{cases}$$

1. Pour placer les points M_n , on écrit l'algorithme suivant :

Variables :	x, y, t nombres réels
Initialisation :	x prend la valeur 3 y prend la valeur 4
Traitement et sortie :	Pour k allant de 1 à 6 Placer le point de coordonnées $(x; y)$ Complé- t prend la valeur ... x prend la valeur ... y prend la valeur ... FinPour

ter cet algorithme et placer les points correspondants.

2. À quel ensemble les points construits semblent-ils appartenir ? Quelle égalité faut-il établir ?
3. Démontrer alors le résultat conjecturé.

Exercice 38 - Défi ! La fonction d'Ackerman

Cette fonction A est une fonction de deux entiers naturels définie ainsi :

$$\begin{cases} A(0, n) = n + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ A(m + 1, 0) = A(m, 1) \text{ pour tout } m \in \mathbb{N} \\ A(m + 1, n + 1) = A(m, A(m + 1, n)) \text{ pour tous } m, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer $A(0, 0)$, $A(0, 1)$ et $A(1, 0)$.
2. Calculer $A(m, n)$ pour $m \leq 3$ et $n \leq 5$.
On présentera les résultats dans un tableau.
3. Émettre des conjectures sur les expressions de $A(1, n)$ et $A(2, n)$ en fonction de n et les démontrer.
4. Démontrer que $A(3, n) = 2^{n+3} - 3$ pour tout $n \geq 0$.

POINT INFO

La définition de cette fonction peut paraître curieuse puisqu'elle fait appel à elle-même !

C'est une fonction dite récursive qui joue un rôle important en informatique.

Exercice 39

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3} \text{ et } v_{n+1} = \frac{1}{u_n - 1}$$

1. Conjecturer une formule explicite pour v_n .
2. En déduire une conjecture pour u_n .
3. La démontrer.