

1 Quelques rappels de classe de première

1.1 Construire et exploiter un arbre pondéré

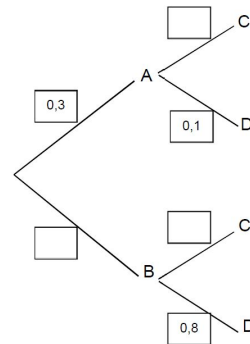
Exercice 1

Soit $p(A) = 0,3$, $p(B) = 0,7$ et $p(A \cup B) = 0,8$.
Calculer $p(A \cap B)$ puis $p_B(A)$ et $p_A(B)$.

Exercice 2

Une situation de probabilités est représentée par l'arbre si-contre.
Compléter cet arbre et donner les probabilités suivantes :

$$p(B); p_A(C); p(A \cap C); p(C); p(D); p_C(A).$$



1.2 Utiliser la formule des probabilités totales

Exercice 3

Afin d'équiper les élèves des groupes scolaires de la commune, une municipalité achète auprès d'un grossiste des stylos-billes de trois marques différentes A , B et C .

- 40% des stylos commandés sont de marque A , la moins chère ; parmi ces stylos, 15% sont défectueux ;
- 35% des stylos commandés sont de marque B , et 10% de ces stylos sont défectueux ;
- 25% des stylos commandés sont de marque C , et 5% de ces stylos sont défectueux.

On choisit alors au hasard un stylo dans le stock de la municipalité.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation étudiée.
2. Déterminer la probabilité que le stylo choisi soit défectueux.
3. Le stylo choisi est en bon état de fonctionnement. Quelle est la probabilité, au centième près, qu'il soit de marque C ?

Exercice 4

Le tableau suivant donne la répartition des 1250 élèves d'un lycée selon leur classe et leur participation à l'atelier d'arts plastiques proposé dans l'établissement.

	Seconde	Première	Terminale
participent à l'atelier	70	28	24
ne participent pas	430	322	376

1. On choisit un élève de Seconde au hasard.
Quelle est la probabilité pour qu'il suive l'atelier d'arts plastiques ?
2. On choisit un élève du lycée au hasard.
 - (a) Construire un arbre pondéré schématisant la situation.
 - (b) Quelle est la probabilité que ce soit un élève de Seconde participant à l'atelier d'arts plastiques ?
 - (c) Quelle est la probabilité que cet élève suive l'atelier d'arts plastiques ?
 - (d) Sachant que l'élève désigné suit l'atelier, quelle est la probabilité qu'il soit en classe de Première ?

1.3 Utiliser l'indépendance de deux événements

Exercice 5

Deux événements indépendants A et B sont tels que $p(A) = \frac{1}{5}$ et $p(B) = \frac{1}{4}$.
Déterminer $p(A \cap B)$, $p_A(B)$ et $p(\overline{A} \cap B)$.

Exercice 6

On jette simultanément un dé bleu et un dé rouge.

Le dé bleu a des faces numérotées 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 5 ; 6.

Le dé rouge a des faces numérotées 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.

On appelle S la variable aléatoire qui à un lancer fait correspondre la somme des deux numéros tirés.

1. Donner la loi de probabilité de S .
2. Les événements $(S = 7)$ et « le dé bleu a donné le numéro 2 » sont-ils indépendants ?
3. Les événements $(S \geq 8)$ et « le dé bleu a donné un numéro pair » sont-ils indépendants ?

Exercice 7

Un sac contient 50 cartons bleus dont 25 portent le numéro 1 et les autres le numéro 2.

On ajoute dans ce sac 15 cartons jaunes numérotés 1.

On tire au hasard un carton de ce sac.

On note B l'événement : « le carton tiré est bleu » et U l'événement : « le carton tiré est numéroté 1 ».

1. Les événements B et U sont-ils indépendants ?
2. Combien faut-il ajouter de cartons jaunes numérotés 2 dans ce sac pour que les événements B et U soient indépendants ?

2 Succession d'épreuves indépendantes

Exercice 8 - Comprendre une situation d'épreuves indépendantes

Voici trois urnes. On tire au hasard une boule de l'urne 1 et on note sa couleur, puis on tire au hasard une boule de l'urne 2 et on note sa couleur, et enfin une boule de l'urne 3 et on note sa couleur (R : rouge, B : bleu, V : vert).



1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Déterminer la loi de probabilité sur l'ensemble des issues de cette expérience aléatoire
3. On gagne à ce jeu lorsqu'on tire au moins deux boules rouges. Calculer la probabilité de gagner une partie.

Exercice 9

On lance une pièce équilibrée dont les faces sont numérotées 1 et 2, puis on tire au hasard un papier de ce sac.

1. S'aider d'un arbre pour déterminer la loi de probabilité sur l'ensemble des E des issues.
2. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois le numéro 2.



3 Épreuves et schéma de Bernoulli

Exercice 10 - Modéliser une situation par un schéma de Bernoulli

Alex essaie trois fois de suite d'atteindre une cible à l'aide d'une arbalète. On estime qu'elle atteint la cible dans 65% des cas et on suppose que ses tirs sont indépendants.

1. Associer une épreuve de Bernoulli à chaque tir et donner la probabilité du succès S .
2. Expliquer pourquoi on peut associer un schéma de Bernoulli à cette situation.
3. Représenter ce schéma par un arbre pondéré.

Exercice 11

Un bac de briques Lego contient 44 pièces jaunes et 56 pièces vertes. Morgane prend une pièce au hasard, regarde sa couleur, puis la remet dans le bac. Elle répète cette expérience aléatoire trois fois.

1. Associer une épreuve de Bernoulli à chaque tirage et donner la probabilité du succès S .
2. Expliquer pourquoi on peut associer un schéma de Bernoulli à cette situation.
3. Représenter ce schéma par un arbre pondéré.

4 Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Exercice 12 - Reconnaître et utiliser une loi binomiale

Un QCM a trois questions avec quatre réponses proposées dont une seule correcte. Un élève répond au hasard et ses réponses sont indépendantes les unes des autres. La variable aléatoire X compte le nombre de réponses correctes données par l'élève.

1. Justifier que la situation peut être modélisée par une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer $P(X = 2)$ et interpréter le résultat. *Arrondir au millième.*
3. Calculer la probabilité que l'élève ait au plus deux réponses correctes. *Arrondir au millième.*

Exercice 13

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier la réponse.

1. Si on procède à dix lancers indépendants d'une pièce équilibrée, la probabilité d'obtenir dix fois pile est inférieure à 10^{-3}
2. Si on procède à cinq lancers indépendants d'un dé cubique équilibré, la probabilité d'obtenir des résultats tous pairs est $\frac{1}{2}$.
3. À un jeu, on gagne avec une probabilité de $\frac{1}{5}$ et on perd avec une probabilité de $\frac{4}{5}$.
En jouant cinq parties successives et indépendantes, la probabilité de gagner une fois au moins est égale à 1.
4. Dans une urne on dispose des boules dont 40% sont blanches, et on effectue trois tirages successifs et indépendants dans cette urne.
La probabilité de tirer trois boules blanches est égale à 0,064.

Exercice 14

On interroge au hasard quatre électeurs d'un scrutin, pour lequel on sait que 5% des bulletins ont été « blancs ou nuls ». On suppose que le comportement face au vote des quatre électeurs interrogés sont indépendants les uns des autres.

- (a) Calculer la probabilité qu'aucun des quatre électeurs n'ait voté « blanc ou nul » au scrutin.
(b) En déduire la probabilité qu'au moins un des quatre électeurs ait voté « blanc ou nul ».
- Déterminer la probabilité qu'exactement trois électeurs sur les quatre aient voté « blanc ou nul » à ce scrutin.

Exercice 15

Une entreprise fabrique une grande quantité de stylos destinés à être livrés dans des grandes surfaces. On prélève au hasard un stylo dans une importante livraison et on appelle E l'événement « le stylo a un défaut de fabrication ». On suppose que $p(E) = 0,014$.

On prélève au hasard vingt stylos dans la livraison. Le nombre important de stylos permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de vingt stylos. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de stylos ayant un défaut de fabrication dans un prélèvement de vingt stylos.

- Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.
- Le directeur de l'entreprise prétend que dans un tel prélèvement, il y a environ trois chances sur quatre qu'aucun stylo n'ait un défaut. A-t-il raison ? Justifier par un calcul.
- Ces stylos sont rangés, par vingt, dans des boîtes et livrées dans un supermarché dans des cartons de 50 boîtes. Le gérant du supermarché qui reçoit les cartons, affirme qu'il y a environ trois chances sur quatre qu'aucun stylo n'ait un défaut dans un carton de 50 boîtes. A-t-il raison ? Justifier par un calcul.

Exercice 16

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On fait tirer à un joueur des boules dans l'urne. À chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros.

On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.

Les deux questions sont indépendantes.

- Le joueur tire deux fois successivement et dans remise une boule de l'urne.

(a) Montrer que $P(X = 1) = \frac{20n}{(n+10)(n+9)}$.

(b) Calculer, en fonction de n la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable X .

(c) Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X vaut :

$$E(X) = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)}$$

(d) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive.

- Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne. Les tirages sont indépendants. Déterminer la valeur minimale de l'entier n afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieure à 0,999.

5 Anciens type Bac

Exercice 17 - Déceler des erreurs dans un échange d'information

Dans cet exercice, les probabilités demandées seront précisées à 10^{-4} près.

Lors d'une communication électronique, tout échange d'information se fait par l'envoi d'une suite de 0 ou de 1, appelés bits, et cela par le biais d'un canal qui est généralement un câble électrique, des ondes radio, ...

Une suite de 8 bits est appelé un octet. Par exemple, 10010110 est un octet.

Partie A

On se place dans le cas où l'on envoie, sur le canal, successivement 8 bits qui forment un octet.

On envoie un octet au hasard. On suppose la transmission de chaque bit indépendante de la transmission des bits précédents. On admet que la probabilité qu'un bit soit mal transmis est égale à 0,01.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de bits mal transmis dans l'octet lors de cette communication.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
2. Déterminer la probabilité qu'exactly deux bits de l'octet soient mal transmis.
3. Que peut-on penser de l'affirmation suivante : « La probabilité que le nombre de bits mal transmis de l'octet soit au moins égal à trois est négligeable » ? Argumenter.

Partie B

Afin de détecter si un ou plusieurs bits de l'octet sont mal transmis, on utilise un protocole de détection d'erreur. Il consiste à ajouter, à la fin de l'octet à transmettre, un bit, appelé bit de parité et qui est transmis après les huit bits de l'octet.

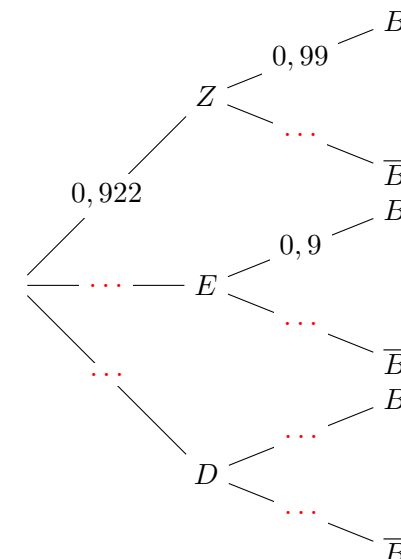
On s'intéresse désormais à la transmission de l'octet suivi de son bit de parité. Une étude statistique a permis d'obtenir que :

- la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis sans erreur vaut 0,922 ;
- la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis avec exactement une erreur vaut 0,075 ;
- si les huit bits (octet) ont été transmis sans erreur, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut 0,99 ;
- si les huit bits (octet) ont été transmis avec exactement une erreur, la probabilité que le bit de parité ait été envoyé sans erreur vaut 0,9 ;
- si les huit bits (octet) ont été transmis avec au moins deux erreurs, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut 0,99.

On choisit au hasard un octet suivi de son bit de parité. On considère les événements suivants :

- Z : « les huit bits de l'octet sont transmis avec aucune erreur » ;
- E : « les huit bits de l'octet sont transmis avec exactement une erreur » ;
- D : « les huit bits de l'octet sont transmis avec au moins deux erreurs » ;
- B : « le bit de parité est transmis sans erreur ».

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessus.
2. Quelle est la probabilité que l'octet soit transmis avec une erreur exactement et que le bit de parité soit transmis sans erreur ?
3. Calculer la probabilité de l'évènement B .



Exercice 18 - Compléter un algorithme pour répondre à un problème

Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier.

40% des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise.

Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70% d'entre eux sont retenus.

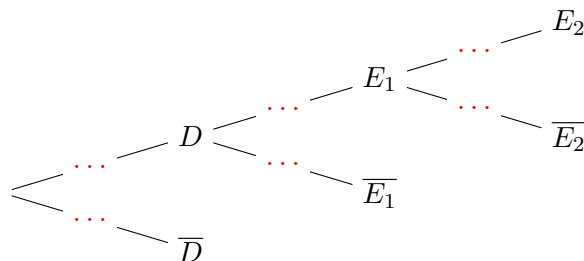
Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25% des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.

On considère les événements suivants :

- D : « Le candidat est retenu sur dossier »,
- E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,
- E_2 : « Le candidat est recruté ».

- (a) Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



- (b) Calculer la probabilité de l'évènement E_1 .
- (c) On note F l'évènement « Le candidat n'est pas recruté ».
Démontrer que la probabilité de l'évènement F est égale à 0,93.

2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les uns des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à 0,07.

On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

- (a) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
- (b) Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3} .

3. On note n le nombre de dossiers traités par le cabinet de recrutement. On admet que les dossiers sont étudiés indépendamment les uns des autres. On admet que la probabilité que le candidat correspondant à un dossier soit recruté est égale à 0,07.

On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces n candidats.

- (a) Exprimer la probabilités $P(X \geq 1)$ en fonction de n .
- (b) Voici un programme incomplet écrit en langage Python qui permet d'obtenir le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité de recruter au moins un candidat soit supérieure ou égale à 0,999.

```
1 n=0
2 while [ ]:
3     n=[ ]
4 print("L'entier n cherché est",n)
```

Indiquer les expressions cachées par les cadres en couleur.

- (c) Déterminer par le calcul la valeur affichée en sortie par le programme.

Exercice 19 - Passer des lois binomiales aux proba. conditionnelles

Un QCM a 20 questions avec une seule réponse correcte parmi les 4 proposées. Le candidat ou la candidate gagne un point par réponse correcte et ne perd aucun point si la réponse est fausse. On considère trois candidats :

- Anselme répond complètement au hasard à chacune des vingt questions. Autrement dit, pour chacune des questions, la probabilité qu'il réponde correctement est égale à $\frac{1}{4}$;
 - Barbara est un peu mieux préparée. On considère que pour chacune des vingt questions, la probabilité qu'elle réponde correctement est de $\frac{1}{2}$;
 - Camille fait encore mieux : pour chacune des questions, la probabilité qu'elle réponde correctement est de $\frac{2}{3}$.
1. On note X , Y et Z les variables aléatoires égales aux notes respectivement obtenues par Anselme, Barbara et Camille.
- (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
- (b) À l'aide de la calculatrice, donner l'arrondi au millièm de la probabilité $P(X \geq 10)$.

Dans la suite, on admettra que $P(Y \geq 10) \approx 0,588$ et $P(Z \geq 10) \approx 0,962$.

2. On choisit au hasard la copie d'un de ces trois candidats.
- On constate, après l'avoir corrigée, que la copie choisie obtient une note supérieure ou égale à 10 sur 20.
- Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de la copie de Barbara ?
- On donnera l'arrondi au millièm de cette probabilité.

Exercice 20 - D'après Bac

Pour chacune des propositions suivantes, dire si la proposition est vraie ou fausse en justifiant.

L'entreprise Micro vend en ligne du matériel informatique, notamment des ordinateurs portables.

Durant la période de garantie, les deux problèmes les plus fréquemment relevés par le service après-vente portent sur la batterie et sur le disque dur :

- parmi les ordinateurs vendus, 5% ont été retournés pour un défaut de batterie et, parmi ceux-ci, 2% ont aussi un disque dur défectueux ;
- parmi les ordinateurs dont la batterie fonctionne correctement, 5% ont un disque dur défectueux.

On suppose que la société Micro garde constant le niveau de qualité de ses produits.

Suite à l'achat en ligne d'un ordinateur :

Proposition 1

La probabilité que l'ordinateur acheté n'ait ni problème de batterie ni problème de disque dur est égale à 0,08 à 0,01 près.

Proposition 2

La probabilité que l'ordinateur acheté ait un disque dur défectueux est égale à 0,0485.

Proposition 3

Sachant que l'ordinateur a été retourné pendant sa période de garantie car son disque dur était défectueux, la probabilité que sa batterie le soit également est inférieure à 0,02.

6 Prise d'initiative, et algorithmique

Exercice 21

On étudie le mouvement aléatoire d'une puce. Cette puce se déplace sur trois cases notées A, B et C .

A l'instant 0, la puce est en A .

- si à l'instant n la puce est en A , alors à l'instant $(n + 1)$, elle est :
 - soit en B avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$;
 - soit en C avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$.
- si à l'instant n la puce est en B alors à l'instant $(n + 1)$, elle est : soit en C soit en A de façon équiprobable.
- si à l'instant n la puce est en C alors elle y reste.

1. Écrire un algorithme effectuant 10000 simulations des trois premiers déplacements de la puce.

Sur ces 10000 simulations, vérifier que, environ 500 à 600 fois la puce se trouve en B au bout des trois déplacements.

Combien de fois environ la puce se trouve-t-elle en A au bout des trois déplacements ?

Combien de fois environ la puce se trouve-t-elle en C au bout des trois déplacements ?

2. Modifier l'algorithme précédent pour effectuer 10000 simulations des quatre premiers déplacements.

Combien de fois environ la puce se trouve-t-elle en B au bout des quatre déplacements ?

Combien de fois environ la puce se trouve-t-elle en C au bout des quatre déplacements ?

On note a_n (respectivement B_n, C_n) l'événement « à l'instant n la puce est en A » (respectivement en B , en C).

On note a_n (respectivement b_n, c_n) l'événement « la probabilité de l'événement A_n (respectivement en B_n , en C_n).

On a donc $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = 0$.

3. En effectuant un arbre pondéré, justifier que $a_3 = 0$ et $b_3 = \frac{1}{18}$.
Déterminer c_3 .
Ces résultats sont-ils conformes aux résultats de la question 1. ?
4. En complétant l'arbre pondéré de la question précédente, justifier que $a_4 = \frac{1}{36}$ et $b_4 = 0$. Déterminer c_4 .
Ces résultats sont-ils conformes aux résultats de la question 2. ?
5. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$a_n + b_n + c_n = 1 ; a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$$

6. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $a_{n+2} = \frac{1}{6}a_n$.
(b) En déduire que pour tout entier naturel p , $a_{2p} = \left(\frac{1}{6}\right)^p$ et $a_{2p+1} = 0$.
(c) Modifier l'algorithme de la question 1. pour vérifier la valeur de a_6 .
7. Justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.
On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$.
Quelle est la limite de c_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 22

Dans une lointaine planète vivent les verts et les bleus : 85% des bleus sont pauvres et 90% des pauvres sont bleus. On choisit un individu au hasard, on notera x la probabilité que cet individu soit bleu ($0 < x < 1$).

Sur cette planète peut-on affirmer qu'il y a une inégalité sociale due à la couleur ?

Exercice 23

Un homme à la démarche titubante tente de rentrer chez lui à pied en empruntant un pont sans garde-corps de 15 pas de long et 4 pas de large ; sa démarche est très particulière :

- soit il avance d'un pas en avant ;
- soit il se déplace d'un pas en diagonale vers la gauche (c'est à dire l'équivalent d'un pas vers la gauche et d'un pas en avant) ;
- soit il se déplace d'un pas en diagonale vers la droite (c'est à dire l'équivalent d'un pas vers la droite et d'un pas en avant).

Ces trois déplacements sont aléatoires et équiprobables.

On suppose qu'un début de la traversée notre individu se situe au milieu du pont (dans le sens de la largeur).

À l'aide d'un algorithme permettant de simuler une traversée du pont, déterminer une valeur approchée de la probabilité de l'événement R « L'homme réussit à traverser le pont ».

Exercice 24

1. Déterminer le plus petit entier n tel que la probabilité d'obtenir au moins une fois la face n°1 sur n lancers successifs et indépendants d'un *dé tétraédrique* bien équilibré, soit supérieure à 0,999.
2. Même question pour rendre la probabilité d'obtenir au moins deux fois la face n°1, supérieure à 0,999.

Exercice 25

Un kangourou se trouve en un point d'une route déserte d'Australie occidentale. À chaque seconde, il saute d'un mètre vers l'avant ou vers l'arrière avec la même probabilité.

1. On appelle origine la position initiale du kangourou sur la route.
Écrire un algorithme qui simule et affiche la position du kangourou au bout d'un saut.
2. Analyser le programme ci-dessous écrit en **Python** et indiquer précisément ce qu'il permet de calculer.

```
from math import sqrt
from random import uniform

A=0
p=0
for i in range(1000):
    if uniform(0,1)<0.5:
        A-=1
    else:
        A+=1
    if A==0:
        p+=1
print(p)
```