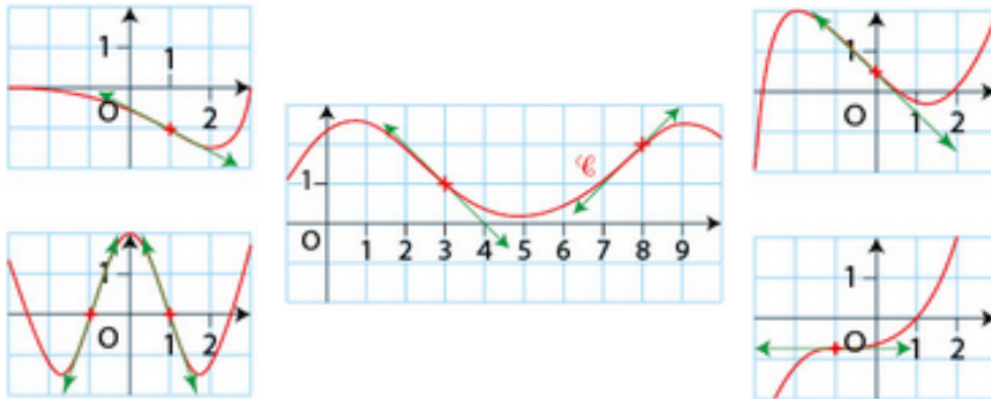


1 Savoir-faire de base

Exercice 1 - Lire les intervalles sur lesquels f est convexe/concave

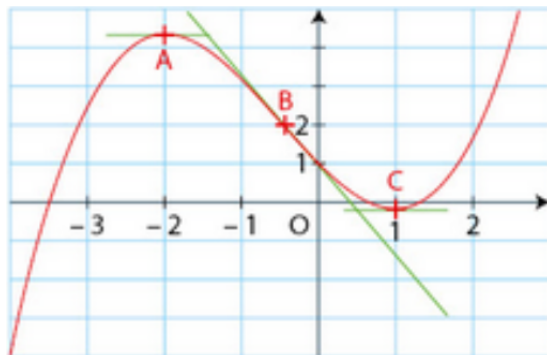
Dans chaque cas, la fonction f , dérivable sur $\mathbb{R}$, est définie par sa courbe $\mathcal{C}$ dans un repère. Lire graphiquement les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.



Exercice 2 - Reconnaître un point d'inflexion

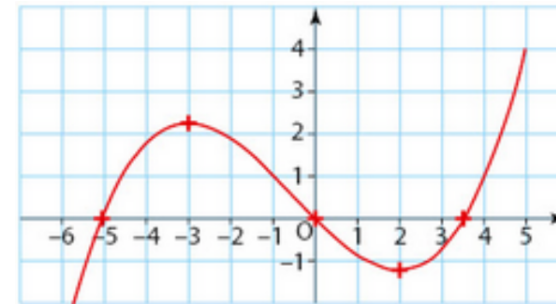
Dans le repère ci-dessous, $\mathcal{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4 ; 2, 5]$.

Lire graphiquement le ou les points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.



Exercice 3 - Lire la convexité avec la courbe de la dérivée

Voici, dans un repère, la courbe représentative de la fonction dérivée f' d'une fonction f définie sur $[-6 ; 5]$. Étudier la convexité de la fonction f , ainsi que les points d'inflexion de sa courbe.



Exercice 4 - Convexité de f et variations de f'

Dans chacun des cas ci-dessous, f est définie sur $\mathbb{R}$, et on donne le tableau de variations de f' . Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$, c'est à dire les intervalles sur lesquels elle est convexe ou concave.

x	$-\infty$	6	$+\infty$
Variations de f_1'	$-\infty$	-2	$+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f_2'		-1	

x	$-\infty$	$2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$	$2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
Variations de f_3'	$+\infty$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$-\infty$

Exercice 5

On assimile le rythme de croissance d'une production à la dérivée de la fonction f définie par :

$$f(x) = -8x^3 + 240x^2 - 2400x + 8000$$

où x est le nombre d'objets produits par heure.

1. Montrer que $f'(x) = -24(x - 10)^2$.
2. Sur quel intervalle f' est-elle croissante ? Décroissante ?
3. En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe.

Exercice 6 - Convexité et tableau de signe de la dérivée seconde

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Le tableau ci-dessous présente le signe de f'' . En déduire l'étude de la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-4	4	$+\infty$	
Signe de f''	$+$	0	$-$	0	$+$

Exercice 7 - Étudier la convexité avec la dérivée seconde (1)

On considère la fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x^3 + 6x^2.$$

Calculer f'' et en déduire le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

Exercice 8 - Étudier la convexité avec la dérivée seconde (2)

On considère la fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ définie par :

$$f(x) = \frac{3-x}{x+1}.$$

1. Montrer que $f''(x) = \frac{8}{(x+1)^3}$.
2. En déduire le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

Exercice 9 - Étudier la convexité avec la dérivée seconde (3)

On considère la fonction f deux fois dérivable sur $]0 ; +\infty[$ définie par :

$$f(x) = 5x + 3 + \frac{1}{x}.$$

1. Montrer que $f''(x) = \frac{2}{x^3}$.
2. En déduire la convexité de f sur $]0 ; +\infty[$.

Exercice 10 - Étudier la convexité avec la dérivée seconde (4)

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-1)e^x.$$

1. Déterminer la dérivée seconde f'' de f .
2. Étudier le signe de $f''(x)$ selon les valeurs de x .
3. En déduire les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe ou concave. Préciser les points d'inflexion de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f dans un repère.

Exercice 11 - Étudier la convexité avec la dérivée seconde (5)

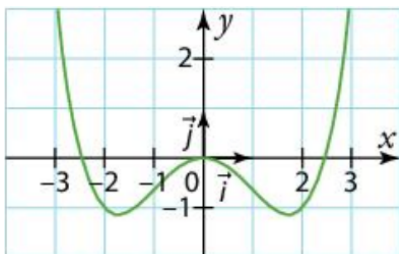
Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 3x - 3x\sqrt{x}.$$

1. On admet que f est deux fois dérivable et on note f'' sa dérivée seconde.
 - (a) Calculer $f''(x)$.
 - (b) Étudier le signe de $f''(x)$.
2.
 - (a) Déduire de la question précédente que f est concave.
 - (b) Interpréter graphiquement le résultat de la question précédente en utilisant les mots « sécantes » et « tangentes ».

Exercice 12 - Lire les points d'inflexion

Déterminer les points d'inflexion de cette courbe.



Exercice 13

On considère la fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne l'affichage obtenu à l'aide d'un logiciel de calcul formel ci-dessous.

1	<code>f(x) := 6 + (6 - x) * exp(x - 5) ;</code>
	<code>// Interprète f</code>
	<code>// Succès</code>
	<code>// lors de la compilation f</code>
	<code>x -> 6 + (6 - x) * exp(x - 5)</code>
2	<code>factoriser(deriver(deriver(f(x), x), x))</code>
	<code>(-x + 4) * exp(x - 5)</code>

1. Dresser le tableau de signes de $f''(x)$.
2. Déterminer les coordonnées des points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f .

Exercice 14

Pour chacune des trois fonctions définies ci-dessous :

$$f_1(x) = 7xe^{-x} \quad ; \quad f_2(x) = (x^2 + 1)e^x \quad ; \quad f_3(x) = (x^2 + 7x + 8)e^{-x}$$

1. Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f .
2. Calculer $f''(x)$.
3. Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction.

2 Exercices bilan

Exercice 15 - Étude d'une fonction composée - Python

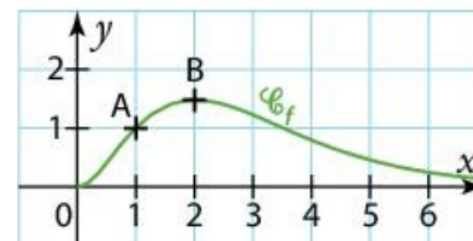
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = 7e^{\frac{20}{x}}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f noté $\mathcal{D}_f$.
2. (a) Calculer $f'(x)$.
(b) En déduire les variations de f .
3. (a) Calculer $f''(x)$.
(b) En déduire les intervalles où f est convexe et ceux où f est concave.
(c) Écrire un algorithme en langage **Python** qui renvoie le tracé de la courbe.

Exercice 16 - Composition de fonctions et limites

La courbe $\mathcal{C}_f$ donnée ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$. On admet que $\mathcal{C}_f$ passe par les points $O(0 ; 0)$, $A(1 ; 1)$ et $B\left(2 ; \frac{4}{e}\right)$ et que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$.



1. Donner $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $f'(2)$.
2. On admet que $f(x) = x^2 e^{-x+1}$.
(a) Calculer $f'(x)$. En déduire les variations de la fonction f .

- (b) Dresser le tableau de variations de f .
- (c) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4.
- 3. (a) Calculer $f''(x)$. En déduire l'étude de la convexité de f .
- (b) Déterminer les éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.
- 4. On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = e^{-f(x)}.$$

Dresser le tableau de variations de g .

- 5. On considère la fonction h définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = \sqrt{f(x)}.$$

Dresser le tableau de variations de h .

Exercice 17 - Domaine de définition

On considère la fonction f définie et deux fois dérivable par :

$$f(x) = \sqrt{x^3 + 8}.$$

- 1. Donner le domaine de définition de f .
- 2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 3. Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f .
- 4. (a) Calculer $f''(x)$.
- (b) Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f .

Exercice 18 - Convexité d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^{x^2-1}$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1. (a) Montrer que, pour tout réel x :

$$f'(x) = (2x^2 + 1)e^{x^2-1}.$$

- (b) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
- 2. (a) Montrer que, pour tout réel x ,

$$f''(x) = 2x(2x^2 + 3)e^{x^2-1}.$$

- (b) Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.
- 3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = x - f(x).$$

- (a) Montrer que $h(x) = x(1 - e^{x^2-1})$.
- (b) On admet que l'inéquation $1 - e^{x^2-1} \geq 0$ a pour ensemble de solutions l'intervalle $[-1 ; 1]$. Déterminer le signe de $h(x)$ sur $[-1 ; 1]$ et en déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ sur $[-1 ; 1]$.

Exercice 19 - Tangente

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x^5 + \frac{25}{3}x^4 + \frac{20}{3}x^3 - 80x^2 + 8x + 1.$$

1. Calculer $f''(x)$.
2. Montrer que $f''(x) = 20(x-1)(x+2)(x+4)$.
3. Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire l'étude complète de la convexité de f (convexité, concavité, points d'inflexion).
4. Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1 .

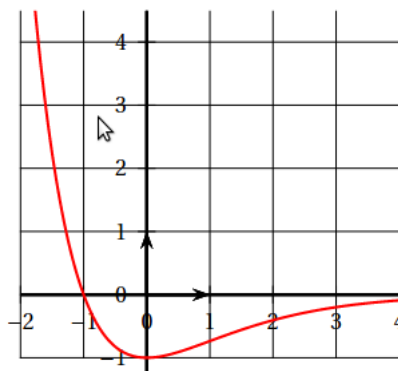
Exercice 20 - Métropole, 8 juin 2021

Partie 1

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1. Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



Courbe représentant la **dérivée** f' de la fonction f .

Partie 2

On admet que la fonction f mentionnée dans la Partie 1 est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)e^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f respectivement.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x ,

$$f(x) = \frac{x}{e^x} + 2e^{-x}.$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.

On admet que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2. (a) Montrer que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = (-x-1)e^{-x}$.
(b) Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f et dresser son tableau de variations.
(c) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2; -1]$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.
3. Déterminer, pour tout nombre réel x , l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction f .
Que représente pour la courbe $\mathcal{C}$ son point A d'abscisse 0?

3 Vers le supérieur

Exercice 21 - Courbe de Lorenz

On appelle courbe de Lorenz la représentation graphique d'une fonction L vérifiant les conditions suivantes :

- L est définie et croissante sur $[0 ; 1]$;
- $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$;
- pour tout $x \in [0 ; 1]$, $L(x) \leq x$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{x+1} - 1.$$

- (a) Déterminer la dérivée de f notée f' .
- (b) Dresser le tableau de variations de f sur $[0 ; 1]$.
- (c) En déduire que $x \geq f(x)$ sur $[0 ; 1]$.
- (d) Conclure.

2. Soit g la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$g(x) = e^x - (e - 2)x + 1.$$

- (a) Calculer $g'(x)$. Donner le sens de variation de g sur $[0 ; 1]$.
- (b) Calculer $g(0)$ et $g(1)$.
- (c) On pose $h(x) = x - g(x)$. Déduire du tableau de signes de $h'(x)$ le tableau de variations de h (on précisera l'arrondi à 0,1 de $h(\ln(e-1))$) puis que, pour tout $x \in [0 ; 1]$, $g(x) \leq x$.

3. En déduire que les courbes représentatives de f et de g sont toutes deux des courbes de Lorenz.

Exercice 22 - Composition avec l'opposé

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle réel I

On pose, pour tout réel x de I :

$$g(x) = f(-x).$$

1. Calculer $g'(x)$.
2. Montrer que si f est paire alors f' est impaire.
3. Montrer que si f est impaire alors f' est paire.
4. Montrer que si f' est impaire alors f est paire.
5. Montrer que si f' est paire et $f(0) = 0$ alors f est impaire.

Exercice 23 - Étudier une fonction composée

Soit m un paramètre réel non nul.

On considère la fonction f_m définie par :

$$f_m(x) = (mx + 1)e^{\frac{1}{mx+1}}.$$

On appellera $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan $\mathcal{P}$, rapporté à un repère orthonormé.

Répondre aux questions suivantes selon m .

1. Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles f_m est définie.
2. Déterminer les limites de f_m aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer les variations de la fonction. Préciser les coordonnées des extrema si la fonction en possède.
4. Construire le tableau de variations de la fonction.
5. Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}_m$.

Exercice 24 - Dérivée n -ième d'une fonction (1)

Soit f la fonction puissance de degré n définie par :

$$f(x) = x^n.$$

avec n entier naturel non nul.

1. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.
2. À l'aide de factorielle, donner une expression de $f^{(n)}(x)$ dérivée n -ième de f .

Exercice 25 - Dérivée n -ième d'une fonction (2)

Soit f la fonction inverse définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Soit k un entier naturel. On considère la dérivée k -ième de f notée $f^{(k)}(x)$.

Ainsi $f^{(1)}(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $f^{(2)}(x) = \frac{2}{x^3}$.

1. Calculer $f^{(3)}(x)$ et $f^{(4)}(x)$.
2. Conjecturer une formule pour $f^{(k)}(x)$.
3. Démontrer cette formule par récurrence sur $k \geq 1$.
4. Démontrer par récurrence sur $k \geq 1$ que, pour $f(x) = \frac{1}{a+x}$, on a $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(a-x)^{k+1}}$.

Exercice 26 - Dérivée n -ième d'une fonction (3)

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = e^{kx}$$

avec k réel non nul.

1. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.
2. Donner une expression de $f^{(n)}(x)$, dérivée n -ième de f .
3. Discuter, selon les valeurs de k et de n , le signe de $f^{(n)}(x)$.
4. En déduire, selon les valeurs de k et de n , le sens de variation de $f^{(n-1)}(x)$.

Exercice 27 - Dérivée n -ième d'une fonction (4)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (1 - 2x)e^{2x}.$$

1. Montrer par récurrence que pour tout réel x et tout entier naturel n non nul :

$$f^{(n)}(x) = 2^n(1 - n - 2x)e^{2x}.$$

2. Pour tout entier naturel n non nul, la courbe représentative de $f^{(n)}$, dans un repère, admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses en un point M_n .

- (a) Calculer les coordonnées $(x_n ; y_n)$ de M_n .
- (b) Vérifier que la suite (x_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
- (c) Vérifier que la suite (y_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

Exercice 28 - Théorème des pentes - démo

Soit f une application convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et a, b et c trois réels.

Démontrer que, si $a < b < c$, alors :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

Exercice 29 - Inégalité de convexité (1) - démo

Soit a et b deux nombres réels tels que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. Soit x et y deux réels strictement positifs, montrer que :

$$\frac{x^a}{a} + \frac{y^b}{b} \geq xy.$$

Exercice 30 - Inégalité de convexité (2) - démo

Montrer que, pour tout $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$

Exercice 31 - Inégalité arithmético-géométrique

Définition

Pour tout réel $x \geq 0$, le nombre y tel que $x = y^n$ est la racine n -ième de x ; on la note $\sqrt[n]{x}$.

Pour tous réels positifs $x_1, x_2, \dots, x_n$ et tout entier naturel n non nul,

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Cette inégalité est appelée l'inégalité arithmético-géométrique.

On se propose de démontrer de différentes façons cette inégalité dans le cas où $n = 2$, c'est à dire de démontrer que pour tous réels positifs a et b :

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}.$$

1 Analytiquement

On admet que pour tous réels positifs a et b , il existe deux réels A et B tels que $e^A = a$ et $e^B = b$.

- (a) En utilisant la convexité de la fonction exponentielle, justifier que pour tous réels A et B ,

$$e^{\frac{A+B}{2}} \leq \frac{e^A + e^B}{2}.$$

- (b) Conclure

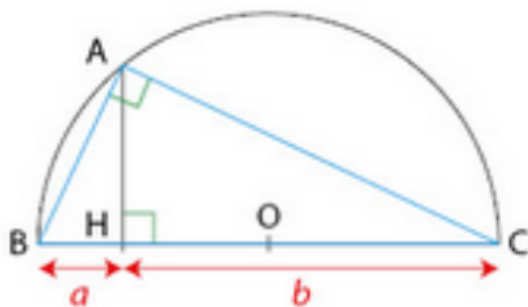
2 Algébriquement

Développer l'expression $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$, puis en déduire l'inégalité souhaitée.

3 Géométriquement

ABC est un triangle rectangle en A inscrit dans le demi-cercle de centre le milieu O de $[BC]$. H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC .

On note $BH = a$ et $HC = b$.



- (a) Exprimer la longueur AH en fonction de a et b .
- (b) Déterminer le maximum de la longueur AH et conclure.

Exercice 32 - Avec une exponentielle

Soit a et b deux nombres réels.

Montrer que :

$$e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{1}{2}(e^a + e^b).$$

Exercice 33 - Monotonie de la fonction réciproque

Soit f une fonction convexe strictement monotone d'un intervalle I vers un intervalle J . Discuter, suivant la croissance ou la décroissance de f , la monotonie de la fonction f^{-1} .

Exercice 34 - Avec un paramètre

Soit λ un réel non nul fixé et $g_\lambda : x \mapsto e^{-\lambda x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

On admet que g_λ est deux fois dérivable et on note Γ_λ sa courbe représentative dans un repère.

Répondre aux questions suivantes selon le signe de λ .

1. Étudier la parité de la fonction g_λ .
2. Déterminer les limites de g_λ sur son domaine de définition.
3. Étudier les variations de g_λ et dresser son tableau de variations.
4. Déterminer la dérivée seconde de la fonction g_λ .

5. La courbe Γ_λ présente-t-elle des points où elle traverse sa tangente ?
6. Donner l'allure de la courbe Γ_λ .

Exercice 35 - Point d'inflexion (1)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{3x^2 + 15x - 10}{3x^2}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. (a) Montrer que pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{-15x + 20}{3x^3}$.
- (b) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^*$.
2. (a) Montrer que pour tout réel $x \neq 0$, $f''(x) = \frac{10x - 20}{x^4}$.
- (b) Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire la convexité de f sur $[2; +\infty[$.
- (c) Montrer que le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 2 est un point d'inflexion.

Exercice 36 - Convexité d'une fonction (1)

Soit f une fonction polynomiale de degré 4 définie par :

$$f(x) = ax^4 + bx + c$$

avec a réel non nul et b et c des réels.

Déterminer $f''(x)$ puis en déduire la convexité de f suivant le signe de a .

Exercice 37 - Convexité d'une fonction (2)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 3xe^{-x^2} - 1.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, ainsi que les limites aux bornes du domaine de définition. Préciser les branches infinies de $\mathcal{C}_f$.

2. Calculer f'' . Qu'en déduit-on pour le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 0 ?
3. Donner une équation de la tangente en 0 à $\mathcal{C}_f$. Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente au point d'abscisse 0. Quel résultat retrouve-t-on ?
4. Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 38 - Point d'inflexion (2)

Soit f une fonction polynomiale de degré 3 définie par :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

avec a réel non nul et b, c et d des réels.

1. Discuter, selon les valeurs de a , de la convexité de la fonction f .
2. Montrer que, quelque soit le signe de a , la courbe représentative de f admet un point d'inflexion d'abscisse $\alpha = -\frac{b}{3a}$.
3. Appliquer ce résultat avec $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 7x + 8$.

Exercice 39 - Avec un logiciel de calcul formel

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \sqrt{x}e^{1-x}$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1. (a) Montrer que f peut s'écrire sous la forme $f(x) = \frac{x}{e^x} \times \frac{e}{\sqrt{x}}$ pour tout $x > 0$.
(b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement.
2. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée première f' et de dérivée seconde f'' .
(a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de x .
(b) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
(c) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
(d) Un logiciel de calcul formel donne l'affichage ci-dessous.

1	factoriser(deriver(deriver(sqrt(x)*exp(1-x))))
	$\frac{(4x^2 - 4x - 1) \cdot (\sqrt{x}) \cdot \exp(1-x)}{4x^2}$

Préciser les intervalles où f est convexe, concave et les éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 40 - Limite d'une suite - ALGO

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan.

1. Étude de la fonction

- (a) Étudier la parité de la fonction f .
- (b) Établir le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
- (c) Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale et préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à cette asymptote.
- (d) Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}_0$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
- (e) Étudier la convexité de f et déterminer les éventuels points d'inflexion.
- (f) Tracer $\mathcal{T}_0$ et $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé du plan, en choisissant une unité graphique adaptée.

2. Étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- (a) Montrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 1$.
- (b) Déduire de la convexité de la fonction f le sens de variation de la suite (u_n) .

- (c) Justifier que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite L .
 (d) Écrire un algorithme en langage naturel de sorte qu'il détermine le plus petit rang n_0 à partir duquel, pour tout entier naturel $n \geq n_0$,

$$|u_n - L| \leq 10^{-1}.$$

- (e) Coder cet algorithme en langage Python, le saisir et en déduire la valeur de n_0 .

Exercice 41 - Famille de fonctions

Pour tout entier naturel n non nul, f_n est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{1+e^x} + nx.$$

On note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- Déterminer pour tout réel x , $f'_n(x)$ et $f''_n(x)$.
- En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Démontrer que la courbe $\mathcal{C}_n$ admet un seul point d'inflexion, noté A . Déterminer les coordonnées de A .

Exercice 42 - Des fonctions polynômes

1. Polynômes de degré 3

P est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

où a, b, c, d sont des nombres réels avec $a \neq 0$.

Étudier la convexité de la fonction P .

CONSEIL : envisager deux cas, $a > 0$ et $a < 0$.

2. Polynômes de degré 4

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

où a, b, c, d et e sont des nombres réels avec $a > 0$.

- (a) Démontrer que la fonction f n'est jamais concave sur $\mathbb{R}$.

CONSEIL : utiliser un raisonnement par l'absurde.

- (b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que f soit convexe sur $\mathbb{R}$.

- (c) Montrer que si f n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$, alors sa courbe admet deux points d'inflexion.

Préciser les abscisses de ces points d'inflexion.

4 Défis

Exercice 43 - Composer deux fonctions

Déterminer deux fonctions f et g distinctes, définies sur l'intervalle $[1 ; 2]$ telles que pour tout réel x de l'intervalle $[1 ; 2]$,

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x).$$

Exercice 44 - Étudier un polynôme de degré 4

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

où a, b, c, d et e sont des nombres réels avec $a \neq 0$.

Déterminer les réels a, b, c, d et e tels que, dans un repère, la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f admet :

- deux points d'inflexion d'abscisses 2 et $-0,5$;
- la droite d'équation $y = -x + 5$ comme tangente au point d'abscisse 0 ;
- une tangente au point d'abscisse -1 de coefficient directeur $-0,5$.