

1 Introduction

π (pi), appelé parfois constante d'Archimède, est un nombre représenté par la lettre grecque du même nom en minuscule (π). C'est le rapport constant de la circonférence d'un cercle à son diamètre dans un plan euclidien. On peut également le définir comme le rapport de l'aire d'un disque au carré de son rayon.

Sa valeur approchée par défaut à moins de $0,5 \times 10^{-15}$ près est 3,141592653589793 en écriture décimale.

De nombreuses formules de physique, d'ingénierie et bien sûr de mathématiques, impliquent π , qui est une des constantes les plus importantes des mathématiques.

Le nombre π est irrationnel, c'est-à-dire qu'on ne peut pas l'exprimer comme un rapport de deux nombres entiers ; ceci entraîne que son écriture décimale n'est ni finie, ni périodique. C'est même un nombre transcendant, ce qui signifie qu'il n'existe pas de polynôme non nul à coefficients entiers dont π soit une racine.

La détermination d'une valeur approchée suffisamment précise de π , et la compréhension de sa nature sont des enjeux qui ont traversé l'histoire des mathématiques ; la fascination exercée par ce nombre l'a même fait entrer dans la culture populaire.

2 Définitions

Dans les dictionnaires et ouvrages généralistes⁴, π est défini comme le rapport, constant dans le plan usuel qu'est le plan euclidien, entre la circonférence d'un cercle et son diamètre. Ce rapport ne dépend pas du cercle choisi, en particulier de sa taille. En effet, tous les cercles sont semblables et pour passer d'un cercle à un autre il suffit de connaître le rapport de la similitude. Par suite, pour tout réel positif k , si un cercle possède un rayon r (ou un diamètre $d = 2r$) k fois plus grand qu'un autre, alors son périmètre P sera aussi k fois plus grand, ce qui prouve la constance du rapport.

$$\pi = \frac{P}{2r} = \frac{P}{d}$$

Par ailleurs, cette même similitude multipliera l'aire A par le carré de k , ce qui prouve maintenant que le rapport $\frac{A}{r^2}$ est constant. On peut montrer, par exemple par la méthode des indivisibles, que cette constante vaut également π .

$$\pi = \frac{A}{r^2}$$

Le dessin cidessous illustre une autre méthode, essentiellement due à Archimède : le périmètre du polygone vaut à peu près $2\pi r$ alors qu'en redistribuant les triangles formés on remarque que son aire vaut à peu près πr^2 . Pour formaliser le « à peu près », il faudrait faire tendre le nombre de côtés du polygone vers l'infini, ce qui illustre déjà la nature « analytique » de π .

3 Irrationalité

Le nombre π est irrationnel, ce qui signifie qu'on ne peut pas écrire $\pi = \frac{p}{q}$ où p et q seraient des nombres entiers. Al-Khwârizmî, au IX^e siècle, est persuadé que π est irrationnel. Moïse Maïmonide fait également état de cette idée durant le XII^e siècle.

Ce n'est cependant qu'au XVIII^e siècle que Jean-Henri Lambert prouve ce résultat. Il expose, en 1761, un développement en fraction continue généralisée de la fonction tangente. Il en déduit qu'un développement de $\tan(\frac{m}{n})$, avec m et n entiers non nuls, s'écrit π .

$$\tan\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n - \frac{m^2}{3n - \frac{m^2}{5n - \frac{m^2}{7n - \frac{m^2}{\ddots}}}}}$$