

Fiche d'exercices n° 1

Groupes et géométrie

Exercice 1.

Soit $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels muni de la loi de composition interne notée $*$, définie par :

$$\begin{aligned}\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ (a, b) &\longmapsto a * b = a + b + ab\end{aligned}$$

$(\mathbb{Q}, *)$ est-il un groupe ?

Exercice 2. (*Proposition 5, Chap. 1*).

Soient deux groupes G_1 et G_2 .

Un groupe G est isomorphe à $G_1 \times G_2$ si, et seulement s'il contient deux sous-groupes H_1 et H_2 tels que :

- a.* $H_i \simeq G_i$, pour $i = 1, 2$.
- b.* $\forall h_1 \in H_1, \forall h_2 \in H_2, h_1 h_2 = h_2 h_1$.
- c.* $G = H_1 H_2$.
- d.* $H_1 \cap H_2 = \{e\}$, où e est l'élément neutre de G

Exercice 3.

Soit G un groupe.

On considère l'application

$$\begin{aligned}f : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto x^{-1}\end{aligned}$$

- a.* Montrer que f est une permutation de G .
- b.* Montrer que f est un morphisme (et donc un automorphisme) si, et seulement si G est abélien.

Exercice 4.

Soit G un groupe dont tous les éléments sont d'ordre 2.

En notation multiplicative, cela signifie que $\forall x \in G, x^2 = e$.

En notation additive, cela signifie que $\forall x \in G, 2x = e$.

- a.* Donner un exemple de tel groupe, non réduit à l'élément neutre.
- b.* Montrer qu'un tel groupe G est abélien.
- c.* Montrer que si G est fini, son cardinal est alors une puissance de 2.

Exercice 5.

Montrer qu'un groupe fini d'ordre pair possède au moins un élément d'ordre 2.

Exercice 6.

Soit G un groupe fini, et soit m un entier premier avec l'ordre de G .

Montrer que, pour tout $a \in G$, l'équation $x^m = a$ possède une solution unique.

Exercice 7.

Montrer que $\text{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq S_3$

Exercice 8.

Montrer que :

a. $\Gamma_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$.

b. $\Gamma_2 = \{1, i, -1, -i\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

c. $\Gamma_3 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ est un sous-groupe pour la multiplication, du corps $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

d. Montrer que $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ sont trois groupes isomorphes.
Reconnaissez-vous ce groupe ?

Exercice 9.

Soit $f : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupes finis, et soit G' un sous-groupe de G .

a. Montrer que l'ordre de $f(G')$ divise à la fois l'ordre de H et l'ordre de G' .

b. En déduire que si l'ordre de G' est premier à l'ordre de H , $G' \subset \text{Ker } f$.

Exercice 10.

Montrer que dans un groupe d'ordre 35, il existe un élément d'ordre 5, et un élément d'ordre 7.

Exercice 11.

Soit G un groupe d'ordre $2p$ avec p un nombre premier.

Montrer qu'il existe un élément d'ordre 2, et un élément d'ordre p .