

Fiche d'exercices n° 3

Groupes et géométrie

Groupes symétriques

Exercice 1.

Pour chacune des permutations suivantes, déterminer :

- sa décomposition canonique en produit de cycles disjoints
- son ordre
- sa signature
- une décomposition en produit de transpositions

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 8 & 7 & 9 & 11 & 12 & 10 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculer $\sigma_1^{50}, \sigma_2^{100}, \sigma_3^{10}$

Exercice 2.

Soit γ un k -cycle dans S_n .

Pour quelles valeurs de p entier tel que $1 \leq p \leq k-1$, γ^p est-il un cycle ?

Exercice 3.

Soit $n \geq 3$ un entier, $\sigma \in S_n$, et γ un r -cycle dans S_n tel que :

$$\gamma = (j_1, j_2, \dots, j_r)$$

Démontrer que $\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1}$ est le r -cycle $(\sigma(j_1), \sigma(j_2), \dots, \sigma(j_r))$.

Exercice 4.

Démontrer que, pour $n \geq 3$, le groupe $\text{Int}(S_n)$ des automorphismes intérieurs de S_n est isomorphe à S_n .

Exercice 5. Systèmes minimaux de générateurs de S_n .

Montrer que le groupe symétrique S_n admet les systèmes minimaux de générateurs suivants :

- Les transpositions $(1, i)$ pour $2 \leq i \leq n$.
- Les transpositions $(i, i+1)$ pour $1 \leq i \leq n-1$.
- Le cycle $(1, 2, \dots, n)$ et la transposition $(1, 2)$.
- Si n est premier, le cycle $(1, 2, \dots, n)$ et n'importe quelle transposition.

Groupes alternés

Exercice 6. *Systèmes de générateurs de $\mathcal{A}_n$.*

Soit $n \geq 4$ un entier.

1. Donner un système générateur connu de $\mathcal{A}_n$.
2. Soient i, j, k, l distincts dans $\{1, 2, \dots, n\}$. Vérifier les relations :

$$(i, j)(j, k) = (i, j, k) \text{ et } (i, j)(k, l) = (i, j, k)(j, k, l)$$

3. En déduire que le groupe alterné $\mathcal{A}_n$ est engendré par :
 - a. l'ensemble des 3-cycles de S_n ;
 - b. l'ensemble des 3-cycles de la forme $(1, i, j)$ pour $2 \leq i, j \leq n$;
 - c. l'ensemble des 3-cycles de la forme $(1, 2, i)$ pour $3 \leq i \leq n$.
 - d. l'ensemble des 3-cycles $(i, i+1, i+2)$ pour $1 \leq i \leq n-2$.
4. Montrer que le troisième système est minimal, mais pas les autres si $n \geq 5$.

Exercice 7.

Dans S_4 on pose :

$$K = \{e, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}.$$

- a. Vérifier que K est un sous-groupe commutatif de $\mathcal{A}_4$.
- b. Ecrire sa table de multiplication.
- c. En déduire que K est isomorphe au groupe de Klein.

Signature

Exercice 8. *Partition de n et permutations régulières.*

On appelle partition de n une suite $k_1, k_2, \dots, k_n$ d'entiers naturels tels que :

$$\sum_{i=1}^n i k_i = n$$

On rappelle que toute permutation $\sigma \in S_n$ se décompose de façon unique en cycles de supports disjoints, et on lui fait correspondre une partition $k = k(\sigma)$ de la façon suivante : k_i est le nombre de i -cycles qui interviennent dans cette décomposition. En particulier k_1 est le nombre de points fixes de σ .

- a. Montrer que deux permutations sont conjuguées dans S_n si, et seulement si elles ont même partition associée. On pourra exprimer la décomposition de $\tau\sigma\tau^{-1}$ en fonction de celle de σ .
- b. Montrer que la signature de σ est :

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{n + \sum_i k_i}$$

- c. On appelle *exposant* d'un groupe fini G le plus petit nombre k tel que $g^k = 1$ pour tout élément $g \in G$. Quels sont les exposants de $\mathcal{A}_5$ et S_5 ?
- d. Une permutation de S_n est dite *régulière* si sa partition associée a un coefficient non nul et un seul. Montrer qu'une permutation est régulière si, et seulement si c'est une puissance d'un n -cycle.

Exercice 9.

On conserve les notations de l'exercice précédent.

- a. Montrer qu'une permutation τ de S_n commute avec un n -cycle si, et seulement si τ est une puissance de σ .
- b. Montrer que dans le cas général, le commutant de σ , c'est à dire le sous-groupe de S_n formé des permutations τ telles que $\sigma\tau = \tau\sigma$ a pour cardinal :

$$\prod_i i^{k_i} k_i!$$

Groupes diédraux

Exercice 10.

En notant P_n le polygone régulier à n côtés centré en $O(0;0)$ et $A_k(\cos(\frac{2ik\pi}{n}); \sin(\frac{2ik\pi}{n}))$ pour $0 \leq k \leq n-1$, et en considérant les notations du cours :

- a. Montrer que toute isométrie $f \in \mathbb{D}_n$ est déterminée par les images de A_1 et A_2 .
En déduire que $\mathbb{D}_n$ ne possède pas plus de $2n$ éléments.
- b. Montrer que $\mathbb{D}_n$ possède au moins $2n$ éléments. Conclure.

Exercice 11.

Avec les notations du cours :

- a. Décrire $\mathbb{D}_2$.
- b. Décrire $\mathbb{D}_3$.
- c. Montrer que, pour $n > 3$, $\mathbb{D}_n$ est un sous-groupe strict H de S_n .
En d'autres termes, $\mathbb{D}_n$ est une "réalisation géométrique" de H .

Exercice 12.

Avec les notations du cours :

- a. Que vaut l'inverse, dans $\mathbb{D}_n$ d'une rotation r^k où $0 \leq k \leq n-1$?
- b. Montrer que, dans $\mathbb{D}_n$, on a : $r^k \circ s$ est d'ordre 2, pour tout $0 \leq k \leq n-1$.
Interpréter géométriquement.
- c. Montrer que pour tout $0 \leq k \leq n-1$, $s \circ r^k = r^{n-k} \circ s$

Exercice 13.

$n \geq 2$ est un entier.

- a. Décrivez la partition de $\mathbb{D}_n$ en classes de conjugaison en distinguant les cas n pair et n impair.
- b. Déterminez le centre de $\mathbb{D}_n$ en distinguant les cas n pair et n impair.
- c. Etablissez la liste des sous-groupes de $\mathbb{D}_n$. Indiquez lesquels sont distingués. (*On pourra classer les sous-groupes de $\mathbb{D}_n$ en fonction du nombre d'antidéplacements qu'ils contiennent*).

Exercice 14.

Tout groupe G engendré par deux éléments a et b tels que :

$$o(a) = n \ (n \geq 2), \ o(b) = 2, \ \text{et} \ o(ab) = 2$$

est isomorphe au groupe $\mathbb{D}_n$.

Exercice 15.

Soit $p \geq 2$ est un nombre premier. Montrer qu'il n'existe, à isomorphisme près que deux groupes d'ordre $2p$:

$$\mathbb{D}_p \text{ et } \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$$

Exercice 16. Groupe diédral infini.

Soit $\mathbb{R}$ considéré comme espace affine euclidien de dimension 1.

À tout $n \in \mathbb{Z}$, on associe la translation $\tau_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\tau_n(x) = x + n$

- a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\tau_1^n = \tau_n$.
- b. On pose $S_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}) = \{\varphi \in Is(1) ; \varphi(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\}$
et σ_0 l'isométrie de $\mathbb{R}$ telle que $\sigma_0(x) = -x$.
Prouver que $S_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})$ est formé par l'ensemble des τ_1^n et des $\tau_1^n \circ \sigma_0$, pour $n \in \mathbb{Z}$.
En déduire que $S_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $Is(1)$.

Le groupe $S_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})$ est appelé *groupe diédral infini* et on le note généralement $\mathbb{D}_{\infty}$.

Exercice 17.

Soit $n \geq 3$ un entier. On pose $\alpha = \exp(\frac{2i\pi}{n}) \in \mathbb{C}$

Démontrer que le groupe multiplicatif engendré par les matrices complexes :

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est isomorphe au groupe diédral $\mathbb{D}_n$.