

Fiche d'exercices n° 4

Groupes et géométrie

Exercice 1.

Soit G un groupe non réduit à l'élément neutre.

Montrer que G ne possède pas de sous-groupe non trivial si, et seulement si G est cyclique d'ordre premier.

Exercice 2.

Soit G un groupe et H un sous groupe de G d'indice 2.

Montrer que H est distingué dans G .

Exercice 3. *Classification des groupes d'ordre inférieur ou égal à 10.*

Trouver tous les groupes d'ordre n , pour $n \leq 10$.

Exercice 4. *poly Jussieu.*

Soit G un groupe, H un sous-groupe distingué de G et K un sous-groupe de G .

- a. Montrer que $KH = HK$ est un sous-groupe de G .
- b. Montrer que H est un sous-groupe distingué de HK .
- c. Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe distingué de K .
- d. Montrer que les groupes $K/(H \cap K)$ et KH/H sont isomorphes.

Exercice 5. *poly Jussieu.*

Soit G un groupe et H un sous-groupe distingué de G .

- a. Montrer que la projection canonique $\pi : G \longrightarrow G/H$ induit une bijection entre l'ensemble des sous-groupes A de G contenant H et l'ensemble des sous-groupes A/H de G/H .
- b. Montrer A est distingué dans G si, et seulement si A/H est distingué dans G/H .
- c. Montrer que les groupes $(G/H)/(A/H)$ et G/A sont isomorphes.

Exercice 6. *poly Jussieu.*

Ecrire la table de multiplication de S_3 . Enumérer tous les sous-groupes de S_3 et de $\mathcal{A}_4$. Lesquels sont distingués ?

Exercice 7. *simplicité de $\mathcal{A}_n$ pour $n \geq 5$, voir poly Jussieu.* a. Soit G un sous-groupe distingué de $\mathcal{A}_n$. Montrer que si G contient un 3-cycle, $G = \mathcal{A}_n$.

- b. Soit $\sigma \in \mathcal{A}_n$. Montrer qu'au moins une des propriétés suivantes est vraie : - $\sigma = id$; - σ est un 3-cycle ; - σ est un produit de $n/2$ transpositions disjointes ; - σ est un produit de 3-cycles et de 1-cycles disjointes ; - il existe une permutation $\tau \in \mathcal{A}_n$ telle que $\tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}$ est un 3-cycle. On pourra considérer séparément le cas où σ a un cycle de longueur au moins 4.
- c. En déduire que pour $n \geq 5$, $\mathcal{A}_n$ est un groupe simple.