

Fiche d'exercices n° 5

Groupes et géométrie

Groupes opérant sur un ensemble

Exercice 1. *poly Jussieu.*

Soit G un groupe fini d'ordre n , p le plus petit facteur premier de n et H un sous-groupe de G d'indice p .

Montrer que H est distingué dans G .

Indication : On pourra étudier le noyau de l'action de G sur l'ensemble quotient G/H .

Exercice 2. *poly Jussieu.*

Soit p un nombre premier.

Un p -groupe est un groupe fini dont l'ordre est une puissance de p .

Montrer que le centre d'un p -groupe G n'est pas trivial. Indication : on pourra faire agir le p -groupe G sur lui même par conjugaison.

Exercice 3. *poly Jussieu.*

Soit p un nombre premier.

- a.* Soit G un groupe tel que le quotient $G/Z(G)$ est cyclique. Montrer que G est commutatif.
- b.* En déduire que tout groupe d'ordre p^2 est commutatif.
- c.* Montrer que si G est un groupe d'ordre p^2 , alors :

$$G \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \text{ ou } G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

Exercice 4.

Soit G un groupe non réduit à l'élément neutre.

Montrer que G ne possède pas de sous-groupe non trivial si, et seulement si G est cyclique d'ordre premier.

Exercice 5. *Jacquet-Malo page 58.*

Montrer qu'aucun groupe d'ordre 200 n'est simple.

Exercice 6. *Jacquet-Malo page 57-58.*

Soient p et q deux nombres premiers distincts. En séparant les cas $p < q$ et $p > q$, montrer qu'aucun groupe d'ordre p^2q n'est simple.

Exercice 7. *Classification des groupes d'ordre pq , voir Jacquet-Malo page 59.*

Soient p et q deux nombres premiers avec $p < q$

- a.* Démontrer qu'il existe un homomorphisme $\varphi : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$
- b.* Supposons $p \nmid q-1$. Démontrer que tout groupe d'ordre pq est cyclique.

- c. Supposons maintenant $p \mid q - 1$. Démontrer qu'il y a deux sous-groupes non isomorphes d'ordre pq , (à savoir le groupe cyclique et un produit semi-direct non commutatif).

Exercice 8. *Simplicité de $\mathcal{A}_n$, voir Jacquet-Malo page 60-61.* **a.** Montrer que les éléments d'ordre 3 et les transpositions sont conjugués dans $\mathcal{A}_5$.

- b. Considérer un sous-groupe normal de $\mathcal{A}_5$ et montrer qu'il ne peut contenir que 60 éléments.
- c. En déduire que $\mathcal{A}_5$ est simple.
- d. Montrer que $\mathcal{A}_n$ est simple pour tout $n > 5$. Afin d'appliquer le cas précédent, chercher dans $\mathcal{A}_n$ une permutation qui laisse fixe tout l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ sauf 5 éléments.

Exercice 9. $\mathcal{A}_5$ est le seul groupe simple d'ordre 60, voir Jacquet-Malo page 63. Soit G un groupe simple à 60 éléments.

- a. En comptant le nombre de 5-sous-groupes de Sylow de G , démontrer que G est isomorphe à un sous-groupe H de S_6 .
- b. Démontrer que H est isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{A}_6$ mais non normal dans celui-ci.
- c. Déduire que H est isomorphe à un sous-groupe de S_5 , donc à $\mathcal{A}_5$. (On introduira une action par translation fidèle bien choisie).

Exercice 10. *Une démonstration originale du théorème de Wilson, voir Jacquet-Malo page 64.*

Soit p un nombre premier, déterminer le nombre de p -sous-groupes de Sylow de S_p . En déduire une implication du bien connu théorème de Wilson.

Exercice 11. *Simplicité de $PSL_n(k)$, voir Jacquet-Malo page 64-69.*

Soit k un corps. Soit E un k -espace vectoriel de dimension n . Soit $SL(E)$ le groupe spécial linéaire des endomorphismes de E de déterminant 1, isomorphe au groupe des matrices de déterminant 1, $SL_n(k)$. Soit $PSL_n(k)$ le quotient de $SL_n(k)$ par son centre. Le but de cet exercice est de démontrer que $PSL_n(k)$ est simple, sauf dans les cas $n = 2$ et $k = \mathbb{F}_2$ ou $\mathbb{F}_3$.

a.

Exercice 12. *Jacquet-Malo page 69-70.*

Dans cet exercice, on suppose que E est un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 3$.

- a. Démontrer que les réflexions engendrent le groupe $O_n(\mathbb{R})$.
- b. Dans un espace vectoriel E , l'application linéaire u est un renversement lorsqu'il existe une base dans laquelle la matrice de u s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & 0 \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Démontrer que les renversements engendrent le groupe $SO_3(\mathbb{R})$.

c. En déduire que les renversements engendrent le groupe $SO_n(\mathbb{R})$.

Exercice 13. *Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$, première méthode, voir Jacquet-Malo page 71-72.*

On considère connue que les renversements engendrent le groupe $SO_n(\mathbb{R})$.

- a.* Montrer que les renversements sont tous conjugués dans $SO_3(\mathbb{R})$.
- b.* Soit H un sous-groupe normal de $SO_3(\mathbb{R})$, et $u \in H \setminus \{I_3\}$. Montrer que, sous certaines conditions, si $d = d(x, u(x))$, alors

$$d^2 = 2(1 - \cos\theta)$$

où θ est l'angle de la rotation u .

- c.* Soit S_2 la sphère unité. Démontrer que pour tout réel m compris entre 0 et d , il existe $x, y \in S_2$ tels que $y = u(x)$ et $d(x, y) = m$.
- d.* Démontrer que pour tout réel m compris entre 0 et d et tous x, y deux éléments de S_2 tels que $d(x, y) = m$, il existe une rotation u' telle que $u'(x) = y$.
- e.* En déduire que H contient un renversement.
- f.* Conclure quant à la simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$.

Exercice 14. *Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$, deuxième méthode, voir Jacquet-Malo page 73-75.*

On rappelle que les renversements engendrent le groupe $SO_3(\mathbb{R})$.

- a.* Montrer que la composante connexe de la matrice identité I_n est un sous-groupe distingué.
- b.* Montrer que $SO_3(\mathbb{R})$ ne contient pas de sous-groupe distingué connexe par arcs non trivial autre que lui même.
- c.* Conclure quant à la simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$.