

Questions de cours :

1. Si E est un ensemble et A et B des parties de E .
Qu'est-ce que la différence symétrique $A\Delta B$?
2. Qu'est-ce que la disjonction de deux propositions P et Q ?
Donner la table de vérité associée.
3. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercices :

1. Décrire les parties de $\mathbb{R}$ dans lesquelles évolue x pour que les assertions suivantes soient vraies :
 - a. $x \geq -3$ et $x \leq 5$ et $x \neq 1$
 - b. $(x > 5$ et $x \leq 11)$ ou $x = -2$
 - c. $(x \leq 0$ et $x > 1)$ ou $x = 4$
 - d. $x < 0 \implies x \leq -5$
2. Calculer la somme $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ en fonction de l'entier naturel $n \geq 1$.
3. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Questions de cours :

1. Qu'est-ce que le produit cartésien de deux ensembles?
2. Démontrer le principe de raisonnement par récurrence.

Exercices :

1. Soit x un irrationnel positif. Montrer que $\sqrt{x}$ est un irrationnel.
2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x - f(y)) = 2 - x - y$$

3. Montrer que l'ensemble $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ ne peut pas s'écrire comme le produit cartésien de deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Questions de cours :

1. Qu'est-ce que l'implication $P \implies Q$?
2. Au choix :
Montrer par un tableau de vérité l'associativité de $\vee$ pour les propositions.
Montrer par un tableau de vérité qu'une implication et sa contraposée sont équivalentes.

Exercices :

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
Indiquer la différence de sens entre les deux propositions proposées :
 - a. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = f(x)$ et $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y = f(x)$
 - b. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)$ et $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y = f(x)$
 - c. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$ et $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$
2. Montrer que si $a + b$ est irrationnel, alors a ou b est irrationnel.
Que pensez-vous de la réciproque de cette proposition ?
3. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
Montrer que :
 - a. $\forall A, A' \subset \mathcal{P}(E), f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$
 - b. $\forall A, A' \subset \mathcal{P}(E), f(A \cap A') \subset (f(A) \cap f(A'))$
4. Montrer que pour tout entier naturel n , $4^{4n+2} - 3^{n+3}$ est divisible par 11.

Questions de cours :

1. Qu'est-ce que la conjonction de deux propositions P et Q ?
Donner la table de vérité associée.
2. Au choix :
Montrer la loi de Morgan : $\neg(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = \neg\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q}$.
Montrer qu'une limite (de suite ou de fonction) est nécessairement unique.

Exercices :

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I et à valeurs réelles.
Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :
 - a. La fonction f s'annule
 - b. La fonction f est la fonction nulle.
 - c. f n'est pas une fonction constante.
 - d. f ne prend jamais deux fois la même valeur.
2. On considère une famille finie d'ensembles distincts deux à deux.
Montrer que l'un au moins de ces ensembles ne contient aucun des autres.
3. Soit n un entier.
Montrer que si n^2 est pair, alors n est pair.
4. Pour toute partie A finie non vide de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note $p(A)$ l'inverse du produit des éléments de A .
Calculer $u_n = \sum p(A)$, où la somme est étendue aux parties non vides de $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$.